ПРЕДИСЛОВИЕ

Как пользоваться этим сборником?

– Как хорошей энциклопедией, то есть читать с любого места и в любом количестве.

Сборник состоит из 7 разделов:

1. Химия и наука о материалах
2. Физика наносистем, наноустройства, наноинженерия, альтернативная энергетика
3. Математика и моделирование наноустройств
4. Бионанотехнологии и медицина
5. Конструкционные материалы
6. Викторины, тесты, угадайки.
7. Начинающие в нано, игры, творческие задания

В каждом разделе задачи представлены в хронологической последовательности, начиная с 2007 года. Уровень сложности каждой задачи можно оценить не только по ее длине, но и по числу баллов, которое за нее можно было получить на олимпиаде. Кроме баллов указана и категория участников – школьники, студенты, научные сотрудники и т.д. На эту запись мы советуем не обращать особого внимания, так как в задачах для студентов есть много интересных вопросов и для школьников, и наоборот. Не огорчайтесь, если многие задачи покажутся вам сложными. Это только на первый взгляд. Учтите, что основная часть материала была предложена для заочного тура, продолжительность которого иногда достигала месяца. Это давало возможность познакомиться с литературой, покопаться в интернете, посоветоваться с друзьями и учителями. Мы рекомендуем Вам почаще обращаться к сайту www.nanometer.ru, где можно найти ответы или подсказки ко многим из поставленных вопросов.

Если вы все же не решили задачу полностью, но хотите узнать, в чем там дело, то в конце каждого задания можно найти авторское решение, из которого вы получите ответы на те вопросы, которые остались непонятными. Разумеется, авторское решение не обязано быть единственно возможным, и если вы придумали другое, поделитесь с нами через указанный выше сайт и мы расскажем о вашем решении всем людям, заинтересованным в нанотехнологиях.

Желаем вам приятного чтения и увлекательного интеллектуального труда!

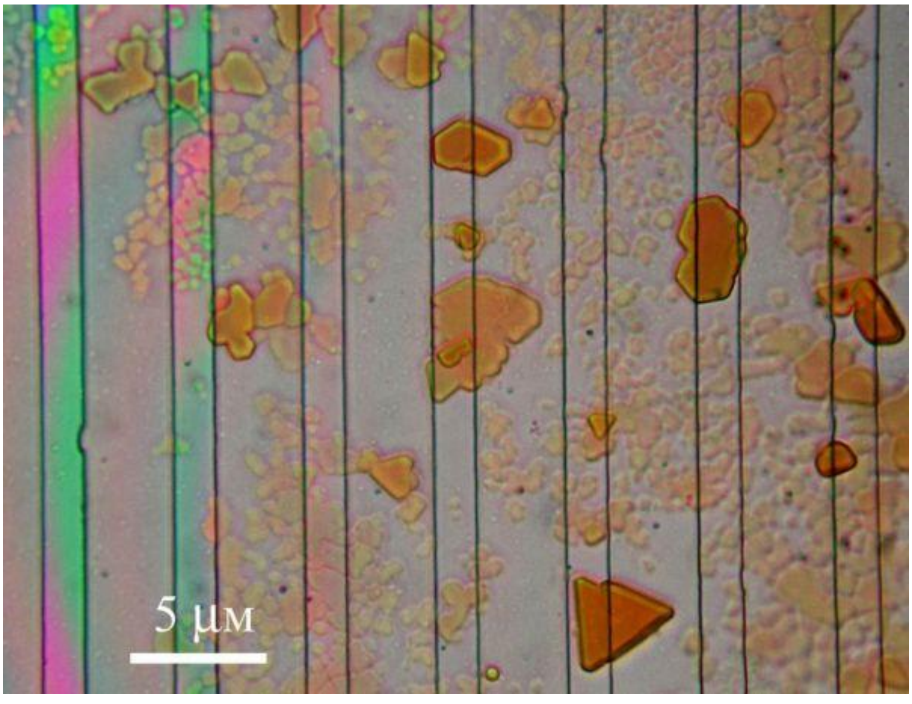
ОГЛАВЛЕНИЕ

УСЛОВИЯ

Сверхрешетка (2007, студенческий уровень)

Достаточно часто наночастицы могут самопроизвольно формировать пространственно-упорядоченные агрегаты - «сверхрешетки» - и даже видимые невооруженным глазом коллоидные кристаллы достаточно большого (по сравнению с объемом частицы) объема. Предположим, что сверхрешетка состоит из сферических наночастиц: **A**, которые образуют гранецентрированную кубическую плотноупакованную решетку, и **B**, меньших по размеру, которые занимают 25 % тетраэдрических пустот в плотноупакованной структуре наночастиц **A**.

1. Напишите эмпирическую формулу для сверхрешетки (**AB_n**) *(1 балл)*
2. Каково должно быть оптимальное соотношение между диаметрами **A** и **B** для создания такой сверхрешетки? *(2 балла)*
3. Каковы, на Ваш взгляд, причины возникновения ориентации отдельных коллоидных кристаллов на рисунке относительно элементов искусственного рельефа (канавок) – графоэпитаксии коллоидных кристаллов? *(2 балла)*



"Графоэпитаксия" коллоидных кристаллов, образуемых квантовыми точками селенида кадмия

Дендримеры – искусственные фотоантенны (2007, задание для всех)

Помните ли вы, чем грозили ужасные, зловредные семена баобабов планете Маленького Принца из сказки Антуана де Сент-Экзюпери? Один лентяй на своей планете не выполол вовремя всего три кустика баобабов и... согласно сказке из этих кустиков вырости огромные деревья, которые завладели всей планетой и разорвали ее. Дендримеры, конечно же, не столь ужасны и даже полезны, хотя само слово «дендример» и происходит от греческого: «dendron» - дерево. Дендримеры относятся к классу полимерных соединений, молекулы которых имеют большое число разветвлений. При их получении с каждым элементарным актом роста молекулы количество разветвлений увеличивается. В результате, с увеличением молекулярной массы таких соединений изменяются форма и жесткость молекул, что, как правило, сопровождается изменением физико-химических свойств дендримеров, таких как характеристическая вязкость, растворимость, плотность и др.

Одни из наиболее эффективных природных наноструктур – светособирающие фотоантенны, которые играют ключевую роль на ранних стадиях фотосинтеза. Антенны состоят из нескольких десятков пигментов порфириного типа, находящихся в белковом окружении. При поглощении света антенна переходит в возбужденное состояние и направляет полученную энергию к реакционному центру фотосинтеза, где она используется для последующих окислительно-восстановительных реакций.

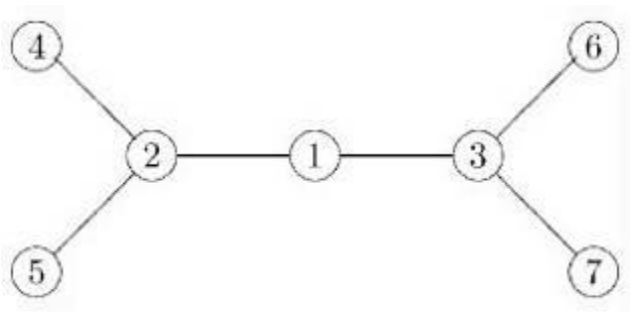
В искусственных фотосинтетических устройствах роль фотоантенн играют супермолекулы-дендримеры, имеющие иерархическую структуру. Рассмотрим один из классов дендримеров. Молекулы этого класса состоят из одного реакционного центра (РЦ) и некоторого количества пигментов, причем РЦ соединен с двумя пигментами, а каждый пигмент (кроме внещних) – с тремя соседями.

1. Сколько пигментов включает дендример n-го поколения? *(2 балла)*
2. Будем считать, что при поглощении света с равной вероятностью возбуждается любой из пигментов, а миграция энергии происходит только в сторону РЦ по кратчайшему пути, причем время миграции между любыми двумя элементами структуры – одно и то же, обозначим его символом t. Рассчитайте среднее время, за которое возбуждение дойдет до РЦ в дендримере n-го поколения. *(2 балла)*
3. При миграции энергии от пигментов к РЦ часть энергии теряется. Эффективность фотоантенны определяется долей энергии, дошедшей от исходного возбужденного пигмента до РЦ. Пусть доля энергии, которая передается на каждом шаге, равна p

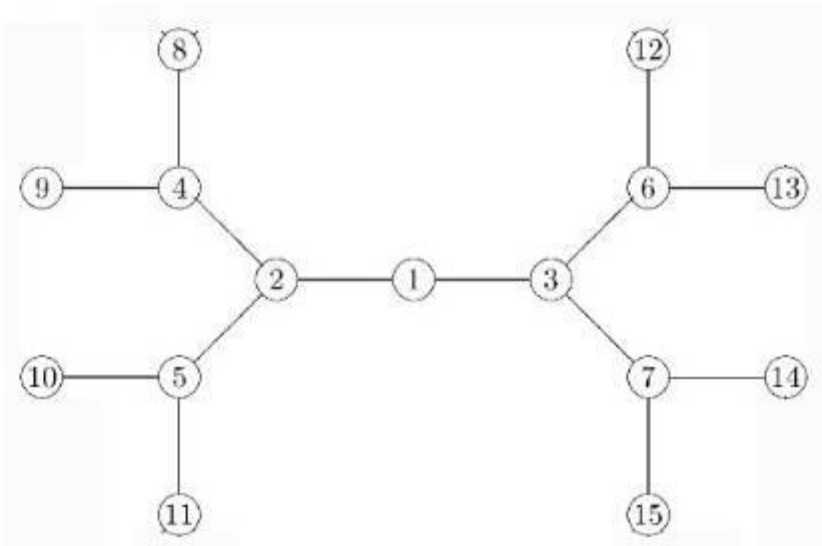
(p = 1). Рассчитайте среднюю эффективность дендримера n-го поколения, считая, что все маршруты миграции энергии равновероятны. *(2 балла)*

4. Пусть пигменты – это бензольные кольца, соединенные тройной связью. Сколько поколений пигментов уместятся в супермолекуле диаметром 10 нм, если диаметр РЦ составляет 4 нм (размерами РЦ пренебрегаем)? Каково среднее время возбуждения РЦ в такой молекуле, если t = 5 пс? Чему равна эффективность такого дендримера, если p = 0.95? *(4 балла)*

Баобабы, разрывающие корнями небольшую планету (сказочн.)



Дендример 2-го поколения. 1 – реакционный центр.



Дендример 3-го поколения. 1 – реакционный центр.

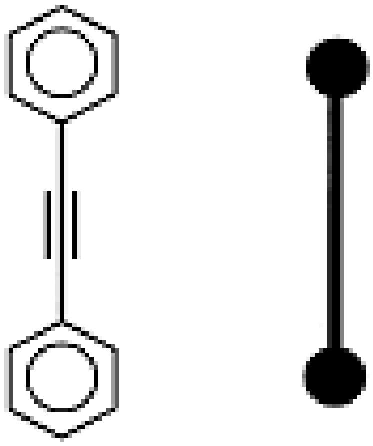
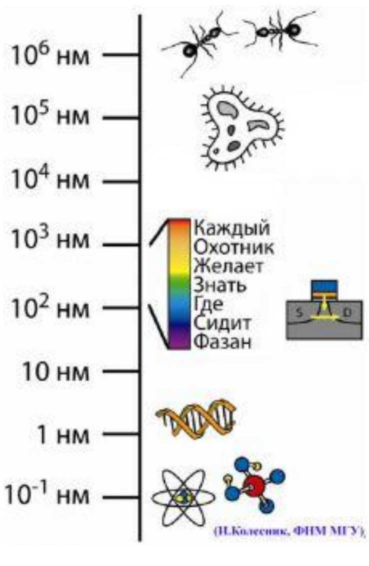


Схема строения "пигмента"

Пятое измерение (2008, школьники, разминка)

Размер имеет значение! Лучший способ познать это – сравнить... Иногда путешествие «вглубь» материи по шкале масштабов называют путешествием по «пятому измерению» в дополнение к уже существующим четырем – трем пространственным и времени. Очень большую роль здесь как раз и играет область «наноразмеров». Нанометр (сокращенно нм) – это одна миллиардная часть метра. Приставка «нано» пришла к нам из древней Греции, в переводе на русский язык она означает «гном» или «карлик» (ηαηοσ). В латыни «нано» имеет значение «маленький», «крошечный». И действительно, один нанометр - это очень маленькая величина, увидеть невооруженным глазом объекты такого размера невозможно. Для сравнения заметим, что волосы человека растут со скоростью 10 нм в секунду (а мы этого не замечаем!), а толщина одного волоска составляет огромную величину - почти 100 тысяч нанометров или 100 микрон. Наноразмерный масштаб используют для характеристики самых маленьких объектов, например, атомов и молекул. Размер атома кремния составляет 0.24 нм, а молекулы «фуллерена» C_{60} ("футбольного мяча", состоящего из шестидесяти атомов углерода) – 0.75 нм. К представителям наномира также можно отнести кластеры, способные содержать до нескольких сотен атомов, и различного рода «наноструктуры», размер которых хотя бы в одном из измерений не превышает нескольких десятков нанометров. Мир наноструктур чрезвычайно интересен, ведь они имеют физические свойства, которые отличаются от свойств объемных материалов. Нанометры являются привычными единицами для описания длины волн света. Например, видимый свет имеет длины волн в диапазоне от 400 до 700 нм. В нанометрах измеряют также размеры микроорганизмов, клеток и их частей, биомолекул.



Шкала масштабов

Вот лишь некоторые примеры :

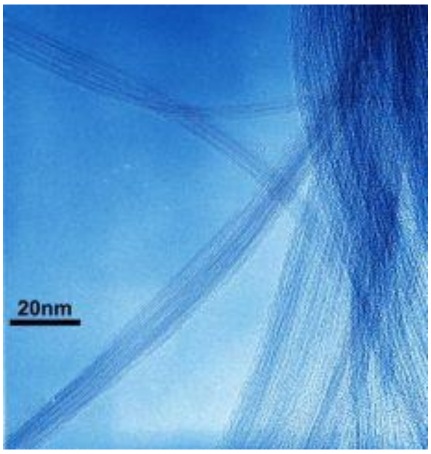
- Диаметр спирали ДНК человека – 2 нм;
- Длина одного витка ДНК – 3.4 нм;
- Молекула гемоглобина – 6.4 нм;
- Пиконановирусы – 20 нм;
- Молекула гемоцианина – 50 нм;
- Бактерии Mycoplasma mycoides 100-250 нм;
- Мимовирусы – 500 нм
- Эритроциты человека – 8000 нм (уже 8 микрон)

Однако «нано» - лишь короткий, хотя и очень важный, отрезок «пятого измерения», его принципиальная важность заключается в том, что на этом кусочке пространственной шкалы реализуются интереснейшие, практически важные химические и физические взаимодействия. В действительности любые объекты и материалы можно и нужно изучать на разных пространственных масштабах. Лишь совокупность особенностей структуры материалов на всех уровнях предопределяет его конечные свойства, важные для фундаментальных исследований и, конечно, практики. Кроме макроуровня (объект в целом) и атомарного уровня (определяющие, фундаментальные характеристики вещества), обычно выделяют масштабный уровень "микро" (характерный размер - микроны, то есть тысячные доли миллиметра), который задает так называемые "структурно-чувствительные" свойства материала. Таким образом, в конечном счете, для создания наноматериалов оказывается важным не только их состав (определяющий основные свойства), размер ("модифицирующий" свойства), но и "размерность" (делающая частицы неоднородными) и упорядочение в системе (усиление, "интеграция" свойств в ансамбле нанообъектов). Это характерно для нанотехнологий - новое качество, как правило, получается только при правильно организованной структуре на более крупных масштабах, чем нано.

<u>Вопросы:</u>

1. Когда – то, говорят, Чингисхан приказал каждому из своих воинов принести по камню к его шатру. Приказано-сделано. Выросла гора. А что если каждый человек на земном шаре принесет по одной единственной квантовой точке (диаметр 10 нм, плотность материала 7 г/см^3) и положит ее около штаб-квартиры Государственной Корпорации «Роснанотех» в кучу, то какую массу будет иметь эта куча? *(2 балла)*
2. Приблизительно сколько раз можно обернуть вокруг талии показанную на фотографии девушку углеродной нанотрубкой, длина которой увеличена во

столько же раз, во сколько раз диаметр нанотрубки увеличен до диаметра флейты, на которой играет девушка, получившая эти нанотрубки? *(2 балла)* Считать длину окружности талии девушки равной 60 см, принять соотношение длины нанотрубок к их диаметру равной 100. Диаметры флейты и нанотрубки оценить из фотографий.

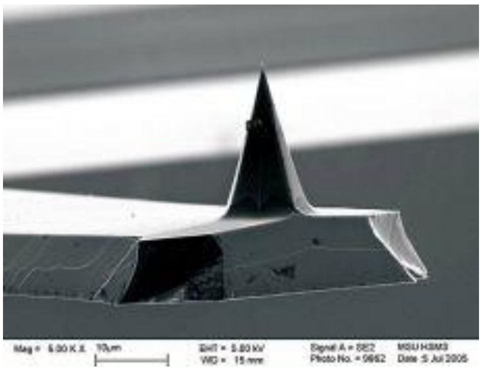


а)

б)

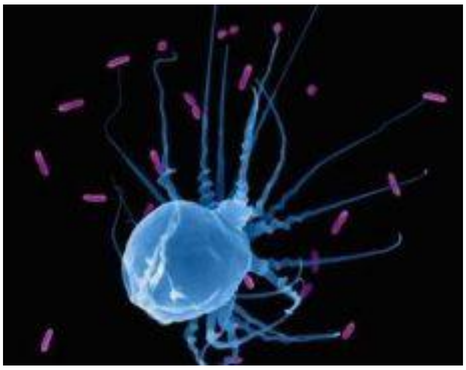
Нанотрубка – а), Девушка – б)

3. Сколько нанороботов может уместиться на острие швейной иглы? *(1 балл)* А иглы атомно-силового микроскопа? *(1 балл)*



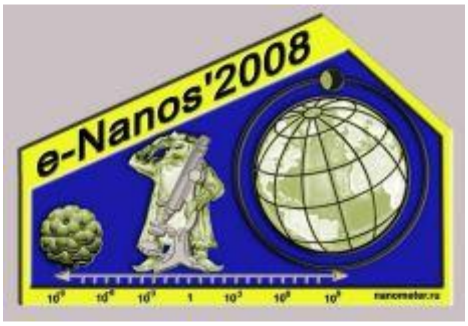
Кантилевер

4. Сколько молекул фуллерена может проглотить прожорливый фагоцит, чтобы полностью заполнить свой «желудок»? *(2 балла)* Считать фагоцит шаром.



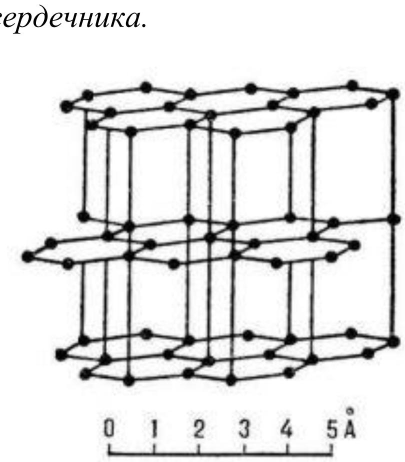
Фагоцит

5. Почему автор эмблемы расположил гнома между фуллереном и Луной? *(2 балла)*



Эмблема (автор рисунка - А.Б.Щербаков)

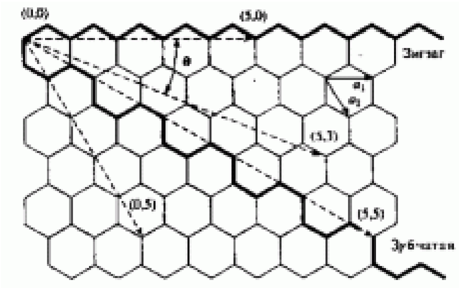
6. Графен – двумерный лист углерода толщиной в один атом. Этот материал впервые был получен командой учёных из Манчестерского университета и Института микроэлектронных технологий в Черноголовке. При использовании обычных графитовых карандашей на бумаге остается след, содержащий чешуйки графена. Предположим, что карандаш имеет квадратное сечение со стороной 1 миллиметр и длину графитового «сердечника» 5 сантиметров. Сколько листов формата А4 можно полностью закрасить таким карандашом, если его след будетсостоять только из монослоя графена? *(3 балла)* Расстояние между слоями графена в чистом графите найдите сами. *Размеры карандаша полностью совпадают с размером пишущего графитового сердечника.*



Структура графита

7. Каплю мыльного раствора 0.01 миллилитра раздули в мыльный пузырь. При каком диаметре пузыря толщина его стенки станет равной длине молекулы поверхностно-активного вещества, находившегося в капле исходного раствора? *(3 балла)* Данные для расчета найдите сами.
8. Два вируса гриппа попали на клетку больного в одну и ту же произвольно взятую точку А. Один из них ползет по поверхности клетки диаметром 10 микрон к точке Б (тоже на поверхности клетки), которая противоположна точке А (расстояние между точками А и Б равно диаметру клетки). Другой вирус проник внутрь клетки и движется к точке Б напрямую. В один и тот же момент времени оба вируса встречаются в точке Б. Каково должно быть соотношение скоростей движения вирусов, чтобы это произошло? *(2 балла)* Как Вы думаете, каково соотношение объемов вируса и клетки? *(2 балла)* Дополнительную информацию найдите сами.
9. Для того, чтобы сделать трос для «космического лифта», в ряде фантастических (и не только) проектов планируется использовать одностенные углеродные нанотрубки, которые являются легким и чрезвычайно прочным материалом. Представьте, что один гипотетический наноробот-пылинка массой 0.01 миллиграмма сшивает две одинаковые одностенные углеродные нанотрубки длиной 1 микрон и диаметром 10 нанометров (каждая) за 1 миллисекунду, после чего у него исчерпывается запас энергии, и он «умирает». Затем два таких же наноробота сваривают куски из двух нанотрубок, сделанных предыдущими нанороботами, вместе на всем их протяжении (таким образом, пучок таких нанотрубок будет в два раза длиннее и в два раза толще). Затем еще большее количество нанороботов сваривает два получившихся пучка по длине и ширине, так что и тот, и другой параметр снова увеличиваются в два раза. Процесс прекращается, когда гигантский пучок достигает длины одну тысячу километров. Каков будет диаметр полученного троса? *(2 балла)* Через какой промежуток времени это произойдет? *(3 балла)* Какова будет масса погибших в процессе сборки троса нанороботов? *(4 балла)*

Подсчет ядерной материи (2008, школьники, физика, геометрия)



Графеновый слой, формирующий при сворачивании углеродную нанотрубку

Одностенные углеродные нанотрубки – одни из самых известных примеров наноматериалов.

1. Рассчитайте количество нейтронов в одностенной углеродной нанотрубке типа «зигзаг» длиной N нм и диаметром b нм, открытой с обоих концов и состоящей из природной смеси изотопов углерода. *(3 балла)*
2. Какой тип гибридизации атомов углерода реализуется в нанотрубке? *(1 балл)*
3. Насколько уменьшится число нейтронов в такой нанотрубке через 1 миллиард лет? *(2 балла)*

Моторчик (2009, математика)

Уже достаточно давно в клетках обнаружены биомолекулярные моторы, способные превращать энергию химических связей молекулы АТФ в энергию вращательного движения. В ходе одного из экспериментов удалось прикрепить к вращающейся оси мотора пропеллер из никеля и наблюдать его вращение. Затем экспериментаторы вычисляли крутящий момент τ по формуле слева, полученной теоретически. Здесь η – вязкость среды, в которой вращается пропеллер, ω – угловая скорость вращения, $L1$ и $L2$ – расстояния от точки прикрепления пропеллера до его концов, h – высота подставки, на которой стоял пропеллер, r –половина ширины пропеллера, acosh – функция, обратная *гиперболическому косинусу (формула для него дана слева)*.

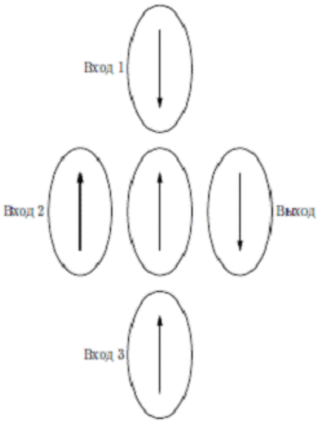
$$\tau = 4\pi\eta\omega\left(L_1^3 + L_2^3\right)\left[3\operatorname{acosh}\left(h/r\right)\right]^{-1}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

1. Пользуясь формулой, найдите, на каком расстоянии от конца должен быть прикреплён пропеллер длины 750 нм и ширины 150 нм к подставке высоты 200 нм, чтобы он вращался с частотой 8 Гц, а крутящий момент был равен 20 пН×нм? *(5 баллов)* Эксперимент проводится в среде вязкости 10^{-3} Па с.

Меньшинство (2009, математика)

На рис. 1 изображена схема из наномагнитов, реализующая функцию меньшинства, и таблица истинности этой функции (то есть, какие значения эта функция принимает при указанных значениях входов; стрелочка «вверх» соответствует значению 1, стрелочка «вниз» – значению 0). На рис. 2 показано, как при помощи такой схемы реализовать логическую операцию «И».

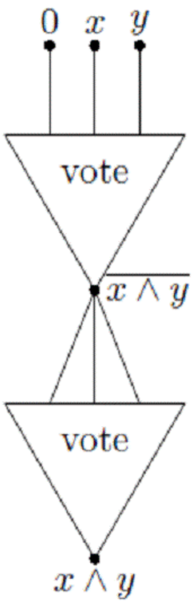


(a) Устройство

Вход 1	Вход 2	Вход 3	Выход
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

(b) Таблица истинности

Рис. 1: Функция меньшинства



(a) Схема

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(b) Таблица истинности

Рис. 2. Функция «И»

Нарисуйте схему, реализующую:

1. Функцию большинства для 7 входных элементов (то есть, на выходе должно получаться то из значений входов, которое встречается чаще); *(4 балла)*
2. Сложение двух двухзначных чисел в двоичной записи (то есть, на входе должны быть четыре цифры этих двух чисел, а на выходе – цифры суммы этих чисел). *(4 балла)*

В каждом из пунктов участники, использовавшие меньше всего элементов, получат *2 дополнительных балла*.

Масса и проценты (2009, математика)

Одностенные углеродные нанотрубки – один из важнейших нанообъектов, имеющий широкие перспективы практического применения.

$$m_{\mathrm{CNT}} = \frac{4\sqrt{3}}{9} m_{\mathrm{C}} \pi D L a^{-2}$$

где mC – масса атома углерода, D – диаметр нанотрубки, L – её длина, a – расстояние между соседними атомами углерода.

1. Докажите, что масса нанотрубки равна выражению, показанному слева. *(2 балла)*
2. Диаметр у одной нанотрубки на 20% больше, а масса – на 30% меньше, чем у другой. На сколько процентов длина первой нанотрубки меньше длины второй? *(2 балла)*
3. Недавно K. Jensen и др. использовали двуслойную нанотрубку с внутренним диаметром D_i = 1.44 нм, внешним диаметром D = 1.78 нм и длиной L = 205 нм для создания молекулярного масс-спектрометра, не требующего предварительной ионизации вещества. Какова масса использованной ими трубки (в а.е.м. и кг)? *(1 балл)*

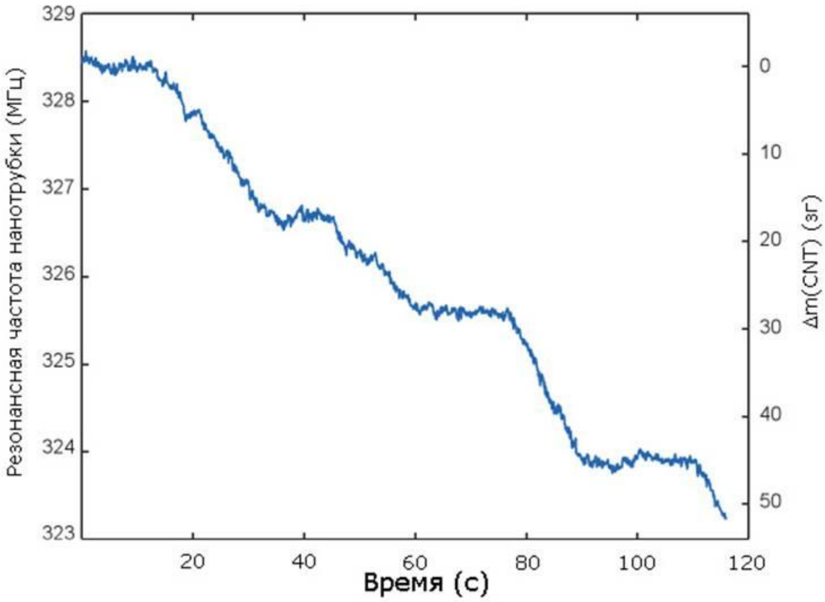
Процент (2009, математика)

Известно, что плотность стали достигает 7800 кг/м^3, а коэффициент прочности – 1 ГПа. Нить, изготовленная из сращённых между собой нанотрубок, предположительно будет иметь плотность 1600 кг/м^3, а её коэффициент прочности будет составлять около 100 ГПа. Нужно изготовить такой трос, чтобы на нем можно было поднимать лифт массой 2 т на высоту 540 м. При этом требуется, чтобы нагрузки на трос были хотя бы в 3 раза меньше предела прочности.

1. Во сколько раз сократится масса троса, если изготовить его не из стали, а из нанотрубок? *(4 балла)*

График (2009, математика)

В 2008 году учёными из Калифорнийского университета и национальной лаборатории Беркли был создан новый тип масс-спектрометра («атомных весов»), позволяющий избежать предварительной ионизации исследуемой частицы.



В качестве основной детали прибора была использована нанотрубка с закрепленным на электроде концом. Частоту механических колебаний такой нанотрубки можно узнать, измеряя силу тока автоэлектронной эмиссии. При осаждении на нанотрубке частиц, массу которых мы хотим измерить, частота её колебаний меняется. По изменению частоты колебаний можно затем по известным формулам определить массу частиц, поглощенных нанотрубкой.

В проведенном эксперименте на некотором расстоянии от нанотрубки происходило испарение частиц золота с вольфрамовой нити. Затем эти частицы осаждались на нанотрубке. При этом между нанотрубкой и нитью находилась заслонка, которая периодически закрывалась, не давая частицам золота достигать нанотрубки.

На графике изображена зависимость полученной в ходе эксперимента частоты колебаний нанотрубки от времени, прошедшего с начала эксперимента. На правой шкале изображено вычисленное по частоте колебаний изменение массы нанотрубки (1 зг = 10^{-21} г).

1. Отметьте на графике периоды времени, когда заслонка была закрыта, и поясните, почему Вы так считаете. *(2 балла)*
2. На графике видно, что частота нанотрубки изменяется со временем даже тогда, когда поглощения частиц золота не происходит. Этот эффект в данном случае

назвали массовым шумом. Оцените погрешность атомных весов, вызванную атомным шумом. *(4 балла)*

3. Установите, сколько атомов золота поглотила нанотрубка (массу атома золота определите самостоятельно по таблице Д.И.Менделеева). *(2 балла)*

Таблица (2009, математика)

1. Известно, что температура плавления твёрдых частиц зависит от их радиуса *r* так, как указано в формуле слева. В приведённой слева таблице температур плавления допущены две опечатки. Восстановите правильные значения **(5 баллов)**.

$$T_{пл}(r) = T_{пл}(\infty)\left(1 - \frac{C}{r}\right)$$

здесь T (бесконечность) и C – некоторые константы.

Таблица

Для выработки решения (восстановления правильных значений).

r, нм	$T_{пл}$	r, нм	$T_{пл}$
1,5	540	20	1277
2	739	30	1297
3	938	40	1303
5	1093	50	1313
7	1166	100	1325
10	1217	150	1329
15	1257		

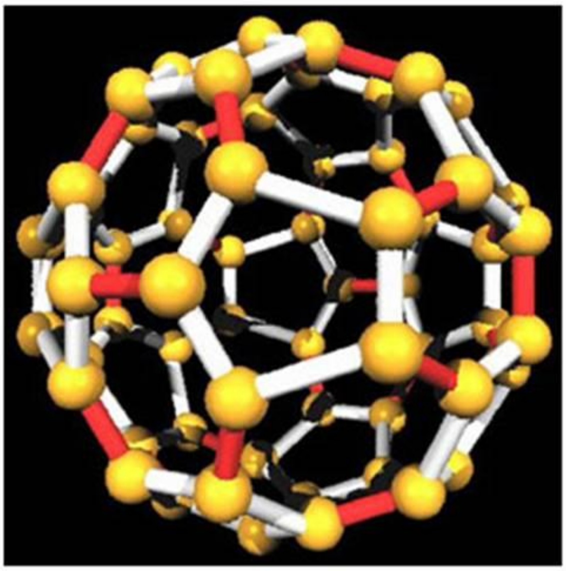
Близорукий наноробот (2009, математика)

Решётку графена, в которой один из атомов заменён на изотоп ^{13}C, обрабатывает наноробот. За один ход он может перейти к одному из соседних атомов, после чего узнаёт, приблизился ли он к изотопу. Кроме того, он способен понять, изотоп ли он сейчас обрабатывает.

1. Как ему найти изотоп не более, чем за (а) 2 000 000 шагов; *(8 баллов)* (б) 1 000 015 шагов; *(4 балла)* (в) 1 000 006 шагов, *(6 баллов)* если изначально изотоп находится в миллионе шагов от робота?

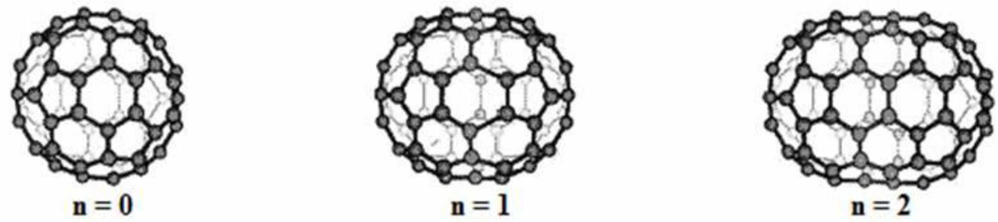
Геометрия фуллеренов (2009, математика)

Фуллерены – это особые аллотропные модификации углерода, в которых атомы связаны в молекулы большого размера (60 атомов и выше), представляющие собой выпуклые многогранники. Кроме перспективных физических и химических свойств, молекулы фуллеренов также весьма интересны с геометрической точки зрения. В молекуле фуллерена, как и в любой другой нанотрубке, каждый атом углерода связан с тремя другими, образуя пяти- и шестичленные циклы.



Фуллерен C_{60}

1. Рассчитайте углы различных правильных многоугольников (от квадрата до семиугольника) и объясните, почему именно пяти- и шестиугольники формируют нанотрубки. *(2 балла)*



"Растягивание" фуллерена в нанотрубку

2. Используя соотношение Эйлера для выпуклого многогранника, определите число пятиугольников в замкнутой нанотрубке, состоящей из n атомов углерода. *(5 баллов)*
3. Используя предыдущий ответ, рассчитайте число пятиугольников в молекуле фуллерена C_{60}**,** *(1 балл)* зная число пятиугольников, определите число шестиугольников в молекуле C_{60}. *(3 балла)*

4. На основе молекулы фуллерена можно строить замкнутые углеродные нанотрубки различной длины. Первый член ряда получается встраиванием 5 шестиугольников по экватору фуллерена. Дальнейшее удлинение осуществляется аналогичным образом. Определите число атомов углерода в нанотрубке после n удлинений. *(4 балла)*

Геометрия нанотрубок (2009, математика)

Одностенная углеродная нанотрубка образуется при сворачивании графитового листа в полый цилиндр без шва. При свертке точка с координатами (0;0) может попасть в любую из красных точек на рис. 1. В результате получаются нанотрубки различной *хиральности.* Хиральность определяется двумя целыми числами m и n, координатами вектора, направленного из точки (0;0) в красную точку, с которой точка (0;0) должна совместиться при свертке. Единичные векторы x и y, образуют базис. Пунктирная линия на рисунке 1 образует окружность в основании трубки с хиральностью (m,n). Направляющая «трубки – цилиндра» перпендикулярна пунктирной линии.

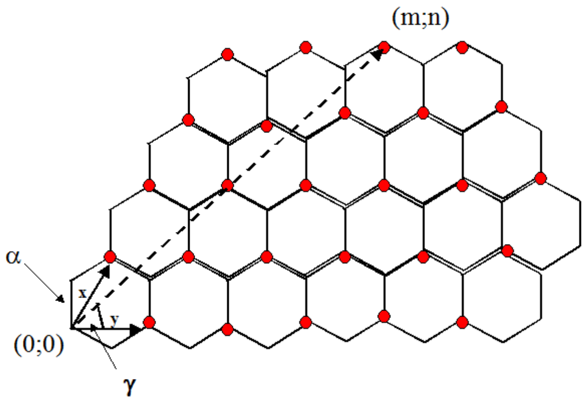


Рис.1

$$D = \left(m^2 + n^2 + mn\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{\pi} \alpha$$

Формула

В ней a = 0.142 нм – кратчайшее расстояние между атомами углерода в графите.

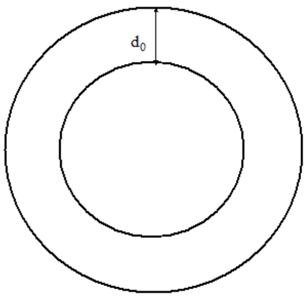


Рис.2

1. Докажите, что диаметр одностенной нанотрубки определяется формулой. *(3 балла)*
2. Расположите перечисленные нанотрубки в ряд по возрастанию диаметра. *(2 балла)* Во сколько раз диаметр самой толстой из перечисленных нанотрубок больше диаметра самой тонкой из них? *(1 балл)*

а) (6, 6), б) (10, 10), в) (12, 0), г) (9, 3), д) (10, 2), е) (11, 7), ж) (4, 3), з) (11, 5), и) (5, 1), к) (12, 4)

3. Получите формулу для угла свертки, g (см. рисунок 1). *(1 балл)* Могут ли трубки с различной хиральностью иметь одинаковый угол свертки? *(1 балл)* Пусть трубка имеет диаметр 1.3 нм, а g = 38°. Какова хиральность трубки? *(1 балл)*
4. Существуют многослойные нанотрубки типа «матрёшка» (см. рис. 2). В «матрёшках» расстояние между стенками трубок d_0 лежит в интервале 0.34-0.36 нм (расстояние между слоями в идеальном графите – 0.3354 нм). Могут ли трубки различного диаметра с $m = n$ образовывать «матрешку»? *(2 балла)*
5. Понятие «хиральные» и «ахиральные структуры» существует и в органической химии. Что это такое? *(1 балл)* Приведите примеры хиральной, ахиральной и прохиральной молекул. *(2 балла)* Подходит ли определение хиральности, принятое в органической химии, для углеродных нанотрубок? *(1 балл)* Что такое энантиомеры? *(1 балл)* Существуют ли углеродные нанотрубки – энантиомеры? *(1 балл)*

Рост дендримеров (2009, математика)

Дендримеры (от греческого "dendron" - дерево) – это полимеры, имеющие разветвленное строение (рис. 1). Структурные элементы, находящиеся в узлах, назовем мономерами. Наиболее важным свойством дендримеров является то, что на каждом этапе роста молекулы происходит очередное разветвление, вследствие чего количество мономеров значительно увеличивается с добавлением каждого последующего слоя (под слоем будем подразумевать совокупность мономеров отделенных от центрального одинаковым числом связей). В процессе роста форма дендримера постепенно приближается к сферической (рис. 2).

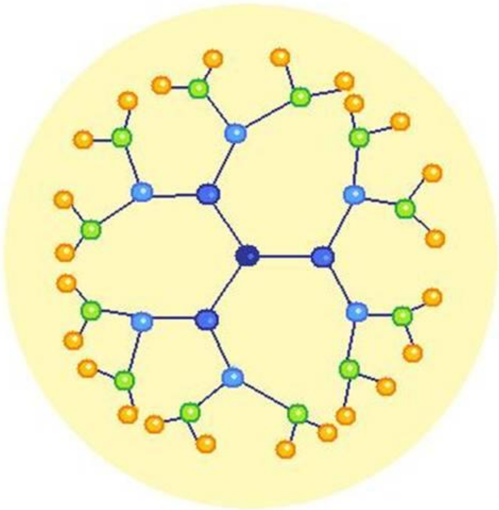


Рис.1

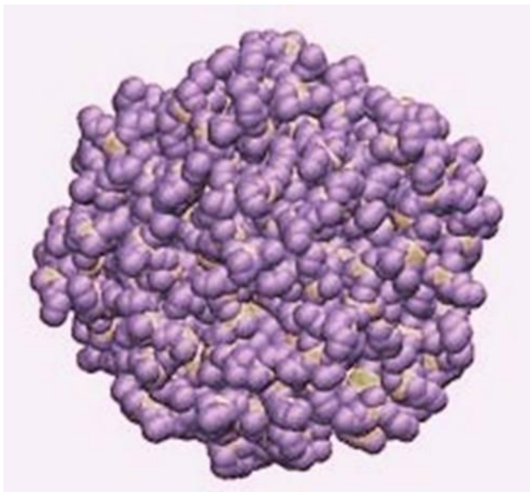


Рис.2

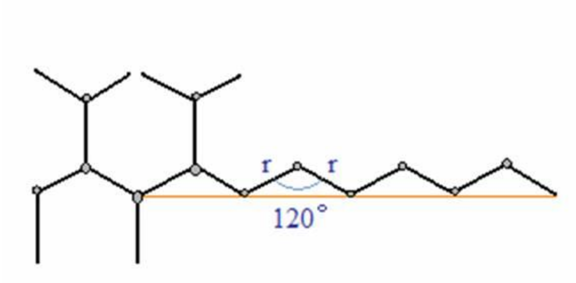


Рис.3.

1. Определите число мономеров в дендримере с N полностью заполненными слоями, если каждый мономер связан с тремя другими (центральный мономер считаем нулевым слоем). *(2 балла)*
2. Назовем радиусом дендримера расстояние от центрального мономера до наиболее удаленного от него мономера внешнего слоя. Рассчитайте радиус R дендримера, содержащего N слоев, считая, что расстояние между соседними мономерами равно r а углы между связями 120° (рис. 3). Отдельно рассмотрите случаи четных и нечетных N. В дальнейших расчетах используйте формулу для четных N. *(3 балла)*
3. С ростом N число мономеров в молекуле возрастает быстрее, чем ее размер, и, следовательно, дендример не может неограниченно расти по данному механизму (с максимальным разветвлением в каждом слое). Начиная с определенного размера, количество мономеров в новом слое не может превосходить некоторого значения, зависящего от номера слоя. Примем, что все мономеры N-го слоя расположены на сфере радиуса R_N (см. пункт 2), а изменение механизма роста происходит, когда площадь сферы будет равна общей площади мономеров (каждый мономер занимает площадь S). Определите номер слоя N_c, при котором происходит изменение механизма роста (составьте уравнение для нахождения N_c). *(2 балла)*
4. Рассчитайте количество мономеров в дендримере при $N > N_c$. *(3 балла)*
5. Как будет изменяться плотность дендримера в зависимости от числа слоев, постройте качественный график (без проведения расчетов). *(2 балла)*

Дырявое покрытие (2010, школьники, математика)

Нанооболочка представляет собой сверхмалый кварцевый шарик, покрытый слоем золота. Предположим, что радиус этого шарика равен r и что покрытие, возможно, имеет «проблемы». Покрытие точки назовем золотыми, не покрытые – простыми. Докажите, что если $R < r\sqrt{3}$, то существуют хотя бы 2 точки одного цвета, лежащие друг от друга на расстоянии R. (Расстояние измеряется в пространстве).

Успех без списывания (2010, школьники, математика)

Одиннадцать школьников пишут олимпиаду по нанотехнологиям в одной из аудиторий. Задание олимпиады состоит из 5 задач. Каждый сделал хотя бы 1 задачу. Доказать, что среди школьников есть хотя бы двое таких, что все задачи, успешно решённые одним из них, сделал и другой.

Шарада (2010, школьники, математика)

Заменить буквы подходящими цифрами так, чтобы сохранилось равенство:

+ нано

Школа

Удача

(т.е. равенство НАНО+ШКОЛА=УДАЧА). Разумеется, разные буквы соответствуют разным цифрам. Известно также, что цифры, соответствующие буквам Ч,А,Ш,У в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию и среди этих четырёх цифр нет куба целого числа.

Запутанная наноэлектроника (2010, школьники, математика)

Электрическая схема состоит из $2n+1$ устройств связанных между собой 90 нанопроводами так, что для любых из этих устройств существует единственное третье устройство, соединённое с каждым из этих двух устройств. Чему равно число n?

Конференционная жизнь (2010, школьники, математика)

На конференцию по нанотехнологиям в субботу приехали 24% от числа её участников, а в воскресенье две трети от числа участников. Для встречи остальных, которые прибыли в понедельник утром одним рейсом, был послан автобус, вмещающий 25 пассажира и автомобиль вместимостью 4 пассажира, в котором ехали встречающие. Все участники конференции благополучно прибыли к месту назначения, в некоторым встречающих пришлось добираться из аэропорта общественным транспортом – в автобусе и автомобиле не оказалось свободных мест.

1. Сколько участников конференции прибыло в субботу?

Гексагональная молекула (2010, школьники, математика)

Может ли существовать молекула, атомы которой расположены в вершинах многогранника, составленного из правильных шестиугольников, возможно различного размера?

Манипуляция атомами (2010, школьники, математика)

Формируя кристалл из отдельных молекул, наноманипулятор строил его поверхность пошагово, используя на каждом шаге a_n молекул. На первом шаге было задействовано 3 молекулы, на втором – 8, на третьем 27. Через несколько шагов наноманипулятор завершил свою работу. Сколько молекул потребовалось, что количество молекул, задействованных на каждом шаге удовлетворяет уравнению:

$$a_{n+3} – a_n = 3(a_{n+2} – a_{n+1} + 8\cdot 3^{n-1})$$

Наноробот-лентяй (2010, школьники, математика)

Наноробот при изучении молекулы, атомы которой находятся в вершинах правильного тетраэдра, должен побывать, двигаясь в пространстве, на каждой грани и вернуться обратно. Известно, что расстояние между атомами равно 0.14 нм. Какое наименьшее расстояние он при этом может пройти?

Водородная мечта (2010, школьники, математика)

Основным препятствием для стационарного и мобильного использования водорода являлось отсутствие эффективных способов его хранения. Хранение водорода в адсорбированном состоянии углеродными нанотрубками решает эту проблему. При изучении одиночной углеродной нанотрубки взаимодействие между молекулами H_2 и атомами C и взаимодействие адсорбированных молекул H_2 между собой описывается с помощью потенциала Леннарда-Джонса 12-6:

$$U(r) = 4\omega\left(\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right),$$

где ω, σ - числовые характеристики, r - расстояние между частицами. Определить для каких неотрицательных значений параметров ω, σ справедливо неравенство:

$$U(r) + U\left(\frac{r}{2}\right) + U\left(\frac{r}{3}\right) + \cdots + U\left(\frac{r}{12}\right) < 4\omega\left(\left(\frac{13\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\frac{12^7}{7}\right).$$

Углеродные мячики (2010, школьники, математика)

Согласно определению IUPAC, фуллерен – это выпуклый многогранник, построенный изатомов углерода. Он состоит из пятиугольников и шестиугольников. Все атомы углеродаимеют координацию 3. Для выпуклых многогранников справедлива теорема Эйлера **В – Р + Г= 2**, В, Р, Г – это , соответственно, число вершин, ребер и граней многогранника.

1. Докажите, что нельзя построить фуллерен из одних шестиугольников. *(1 балл)*
2. Покажите, что у любого фуллерена есть 12 пятиугольных граней. *(1 балл)*
3. Докажите, что любой фуллерен содержит четное число атомов. *(1 балл)*
4. Особой стабильностью отличаются фуллерены, на поверхности которых пятиугольники не граничат друг с другом (правило изолированных пятиугольников). Какое минимальное число атомов может содержать фуллерен, подчиняющийся правилу изолированных пятиугольников? *(2 балла)*

Для изображения фуллеренов на плоскости используют диаграммы Шлегеля. Диаграмма Шлегеля – это проекция трехмерного многогранника на плоскость. Проекция делается из точки, находящейся над центром одной из граней. На проекции видны все атомы и все грани.

Перед вами диаграмма Шлегеля для фуллерена C_{70}.

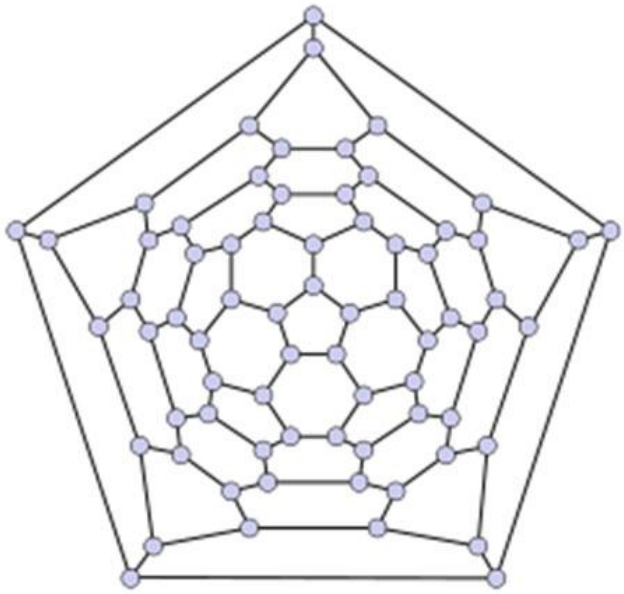


Рис.1. Диаграмма Шлегеля для фуллерена C_{70}

5. Какой многогранник, состоящий из атомов углерода, изображен на следующей диаграмме Шлегеля (рис.2)? Это – фуллерен? Если – да, то чему равны В, Г5 и Г6?

Существует ли в этом фуллерене граничащие друг с другом шестиугольные грани? *(2 балла)*

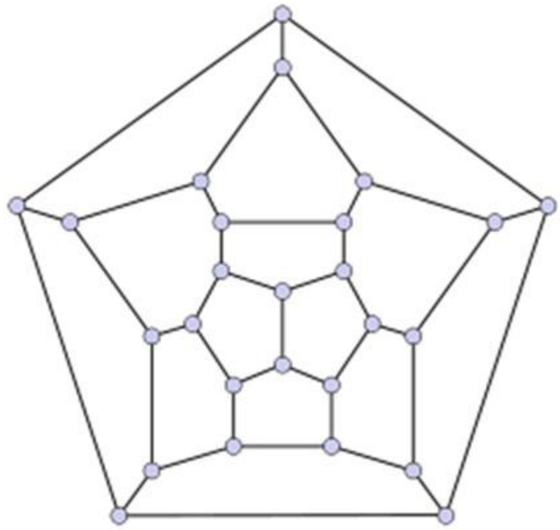


Рис.2

Изомеры (2010, школьники, математика, повышенной сложности)

Изомерами называют молекулы, имеющие одинаковый элементный состав и молекулярнуюмассу, но отличающиеся друг от друга по химическому строению или пространственнойконфигурации. Такие молекулы невозможно совместить одну с другой без разрыва химическихсвязей. Пары изомеров, переходящих друг в друга при отражении, называются зеркальными (оптическими) изомерами.

Модифицированные фуллерены – новый и интересный класс материалов, который ужесейчас вызывает огромный интерес не только у химиков, но и у медиков. Вместе с тем,структура молекул фуллеренов «располагает» для самых разных видов изомерии: некоторыезамещенные фуллерены имеют астрономическое количество изомеров. Поскольку изомерныемолекулы часто различны по физическим и химическим свойствам, необходимо уметьоценивать число возможных изомеров.

Рассмотрим фуллерен **А**, имеющий структуру усеченного икосаэдра, – первый представитель некоторого гомологического ряда. Каждый последующий представитель этого ряда может быть получен, если молекулу предыдущего «разрезать» на 2 части, как показано на рис. 1, повернуть одну из них на угол 360°/10, и встроить между ними слой атомов углерода.

Нанотрубка **X** отличается от фуллерена **А** на **n** таких слоев-вставок углерода.

1. Сколько и каких изомеров будет у фуллерена **А**, если пометить один из атомов(например, заменив на 13C)? У фуллерена **Б**? У фуллеренов **В**, **Г**, **Д**? У нанотрубки **X**? *(3 балла)*
2. Сколько и каких изомеров будет у фуллерена **А**, если отметить 2 ближайших соседних атома углерода? У фуллерена **Б**? У фуллеренов **В**, **Г**, **Д**? У нанотрубки **X**? *(3 балла)*
3. Сколько и каких изомеров будет существовать у **А**, **Б**, **В**, **Г**, **Д**, **X**, если пометить по одному атому в каждом из торцевых пятичленных циклов? Ответ обоснуйте. *(2 балла)*
4. Сколько и каких изомеров будет существовать у **А**, **Б**, **В**, **Г**, **Д**, **X**, если в одном из торцевых пятичленных циклов использовать две разных метки? *(1 балл)*

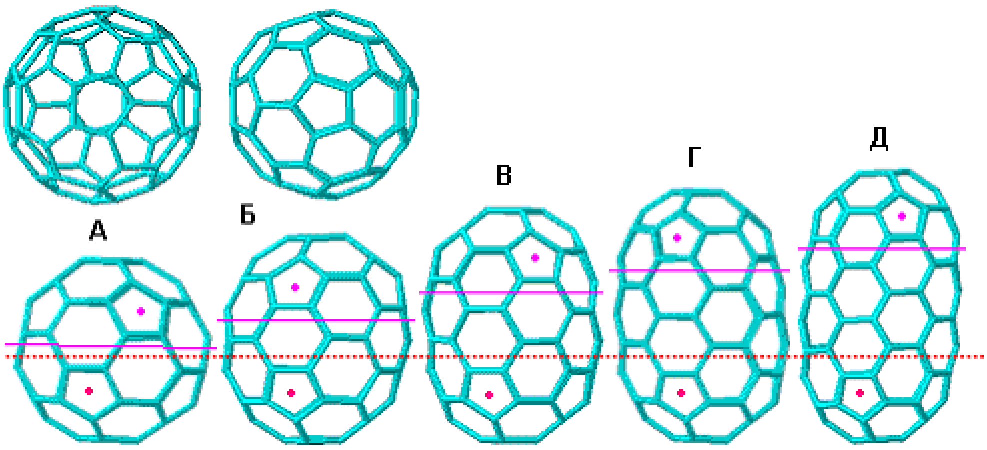


Рис. 1. Построение гомологического ряда. Для фуллеренов ***А*** *и* ***Б*** *также показан вид сверху. Точками отмечены 2 пятичленных цикла по краям полусфер, между которыми «наращиваются» одинаковые слои атомов углерода.*

Занимательная стереометрия – от Платоновых тел к фуллеренам и нанотрубкам (2010, школьники, математика, повышенной сложности)

Геометрия приближает разум к истине»

Платон

Геометрия и размер фуллерена. Фуллерен **А** имеет структуру, которая получается при срезании всех вершин некоторого правильного выпуклого многогранника **М** (см. рис. 1) так,что все новые грани представляют собой правильныемногоугольники.

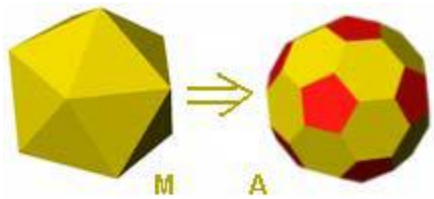


*Рис. 1. Многогранник **М** является Платоновым телом и имеет 30 ребер, 12 вершин, 20 граней.*

1. Исходя из приведенных данных, выведите формулу фуллерена **А**, общее количество ребер и граней, число пяти- и шестиугольных граней **А**. Приведите расчет.*(1балл)*
2. В фуллеренах каждый атом углерода соединен с соседними атомами одной π-связью и 3 σ-связями. Сколькоπ-связей и сколько σ-связей содержит молекула **А**? Приведите расчет. *(1 балл)*
3. Размер наночастиц играет важную роль в их способности проникать в биологические объекты. Используя только приведенные данные и школьную тригонометрию, рассчитайте размер фуллерена **А.** Принять длину всех С-С связей, равной как в графите, 0,142 нм, размерами атомов пренебречь. Для расчета рассмотреть систему 3-х взаимно перпендикулярных прямоугольников, опирающихся на ребра икосаэдра (см. рис. 2), размером молекулы считать диаметр описанной вокруг **А** сферы. *(5 баллов)*

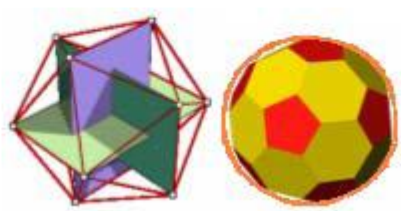


Рис. 2.

От фуллерена к нанотрубкам. Из фуллерена **А** возможно вырастить другие «родственные» фуллерены инанотрубки. Для этого в экваториальную плоскостьмолекулы

А последовательно «встраивают» слоиуглерода, содержащие необходимое количество атомов (см. рисунок 3).

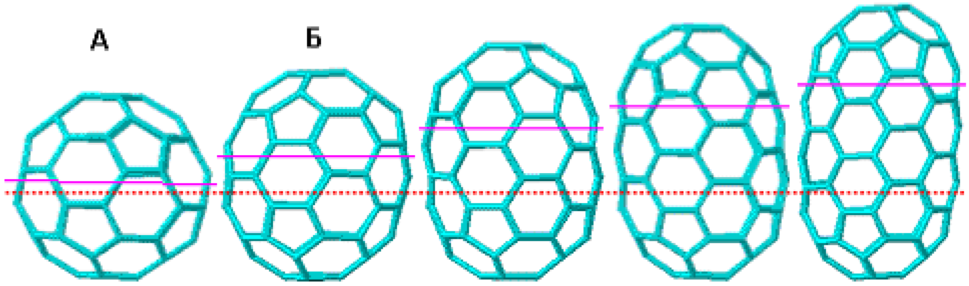


*Рис. 3. Конструирование нанотрубки из фуллерена **А**. В торцах молекул находятся пятиугольные грани.*

4. Рассчитайте формулу фуллерена **Б**. *(1 балл)* Выведите общую формулу приведенного гомологического ряда. *(1 балл)*
5. Можно условно считать, что первый фуллерен, для которого выполняется условие L > 100*D, является самой короткой нанотрубкой (обозначим ее как **X**). Рассчитайте формулу **X**. Принять, что диаметр молекул при переходе от **А** к **X** не изменяется и длины всех связей одинаковы. (**3 балла**)

Свойства нанотрубок. Стенка любой нанотрубки является свернутым вдоль направления вектора **R** листом графита. **R** равен векторной сумме **n** *r1* и **m** *r2* (*r1* и *r2* задают ячейку графита, **n** и **m** – численные коэффициенты, рис. 4).

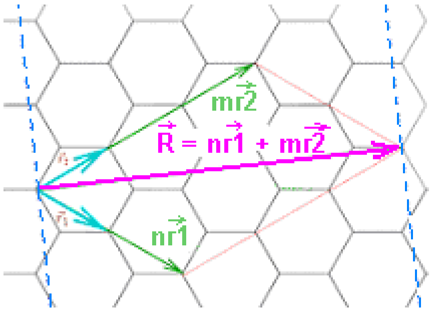


*Рис. 4. Нанотрубка как свернутый лист графита. Для получения нанотрубки (**n, m**), графитовую плоскость надо разрезать по пунктирным линиям и свернуть вдоль направления вектора **R**. В этом примере **n** = 2 **m** =3.*

Различают следующие типы нанотрубок:

- «зубчатые», **n** = **m**

- зигзагообразные, **m** = 0 или **n** = 0

- спиральные или хиральные нанотрубки (все остальные значения **n** и **m)**

Если для трубки 2***m*** + ***n*** = 3***k***, где ***k*** – целое число, то трубка имеет металлическуюпроводимость, иначе – полупроводник.

6. Найдите (***n***, ***m***) и определите тип нанотрубки **X**. Какой будет ее проводимость? *(3 балла)*

Время жизни ограничено… (2010, школьники, региональный тур)

При тестировании мобильных телефонов с экранами на основе органических светодиодов (OLED), производители обращают внимание на время отклика устройства, которое является одной из важнейших характеристик – и, как известно, существенно влияет на цену. Одним из основных параметров, отвечающих за время отклика, является время жизни возбужденного состояния материала излучающего слоя, в качестве которого используют часто сложные соединения, содержащие редкоземельные элементы. Упрощенно, время жизни - это величина w в показателе экспоненты I=I(0)exp(-t/w), которой описываются эти кинетические кривые затухания люминесценции (свечения).

При тестировании комплексов тербия (ион тербия Tb^{3+} с органическими молекулами - лигандами) в качестве потенциальных материалов для OLED оказалось, что время жизни возбужденного состояния для них имеет следующие значения: **$Tb(dpm)_3$: 0.45 мс, $Tb(bz)_3$: 1.5 мс, $Tb(pobz)_3$: 3.0 мс** (в формулах указаны условные обозначения органических молекул –лигандов, которые, на самом деле, к сути задачи не имеют отношения, мс – миллисекунды, одна тысячная секунды).

1. Оцените соотношения времен для этих трех соединений тербия, при которых для каждого из них люминесценция станет в 2.718281828459045 раз слабее. *(3 балла)*

Очный тур (2010, школьники, математика)

Вариант 1. Вариативная часть по контролю общих знаний по математике

(если Вы решили не все задания – ничего страшного, главное – покажите, что Вы знаете основы математики)

1. Участники олимпиады по нанотехнологиям съездили на пятичасовую автобусную экскурсию. Из этого времени 1.5 часа заняло посещение музея, а остальное время автобус ехал со средней скоростью 40 км/ч. Какое расстояние проехал автобус? *(1 балл)*
2. На рисунке приведена мощностная характеристика водородо-воздушного топливного элемента с добавлением частиц платины размера 2 – 4 нм. Какова наибольшая мощность такого топливного элемента? *(1 балл)*

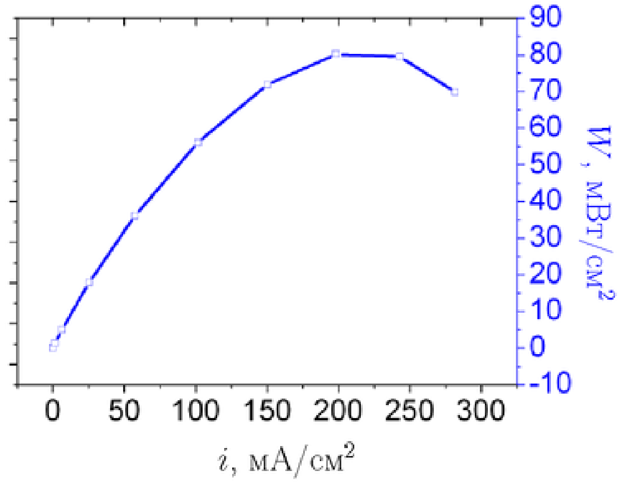
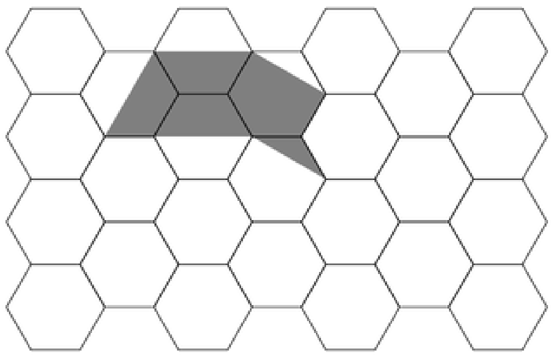


График в задаче 2 взят из автореферата

http://www.nanometer.ru/2010/03/27/avtoreferat_208503/PROP_FILE_files_1/dunaev.pdf

3. Смешали 200 мл трёхпроцентного раствора квантовых точек с 400 мл шестипроцентного. Раствор какой «процентности» получился? Обоснуйте такой выбор способа выражения концентрации, при котором задача не потребует знания дополнительных данных (или введете разумные допущения). *(2 балла)*
4. На рисунке изображён фрагмент решётки графена. Во сколько раз площадь заштрихованной области больше площади одной шестиугольной ячейки? Ответ обоснуйте. *(2 балла)*



5. Известно, что диаметр нанотрубки хиральности (m, n) равен

$$\sqrt{3}a_{C-C}(m^2+mn+n^2)^{1/2}/\pi,$$

где a = 0.142 нм – кратчайшее расстояние между атомами углерода в графите. Найдите n, такое что диаметр нанотрубки хиральности (2, n) приблизительно равен 0,342 нм. (**2 балла**)

<u>Вариант 2. Вариативная часть по контролю общих знаний по математике</u>

(если Вы решили не все задания – ничего страшного, главное – покажите, что Вы знаете основы математики)

1. Участники олимпиады по нанотехнологиям съездили на шестичасовую автобусную экскурсию. Из этого времени 1.5 часа заняло посещение музея, а остальное время автобус ехал со средней скоростью 50 км/ч. Какое расстояние проехал автобус? *(1 балл)*
2. На рисунке приведена мощностная характеристика водородо-воздушного топливного элемента с добавлением частиц платины размера 2 – 4 нм. При каких значениях плотности тока мощность такого элемента меньше 55 мВт/см²? *(1 балл)*

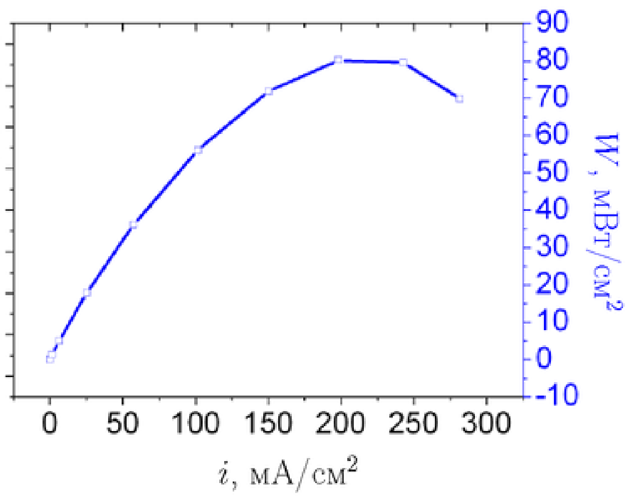
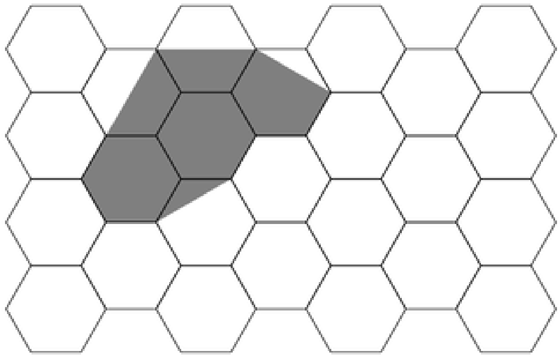


График в задаче 2 взят из автореферата *http://www.nanometer.ru/2010/03/27/avtoreferat_208503/PROP_FILE_files_1/dunaev.pdf*

3. Смешали 100 мл двухпроцентного раствора квантовых точек с 200 мл пятипроцентного. Раствор какой «процентности» получился? Обоснуйте такой выбор способа выражения концентрации, при котором задача не потребует знания дополнительных данных (или введете разумные допущения). *(2 балла)*
4. На рисунке изображён фрагмент решётки графена. Во сколько раз площадь заштрихованной области больше площади одной шестиугольной ячейки? Ответ обоснуйте. *(2 балла)*



5. Известно, что диаметр нанотрубки хиральности (m, n) равен

$$\sqrt{3}a_{C-C}(m^2+mn+n^2)^{1/2}/\pi,$$

где a = 0.142 нм – кратчайшее расстояние между атомами углерода в графите. Найдите n, такое что диаметр нанотрубки хиральности (3, n) приблизительно равен 0,342 нм. *(2 балла)*

<u>Вариант 3. Вариативная часть по контролю общих знаний по математике</u>

(если Вы решили не все задания – ничего страшного, главное – покажите, что Вы знаете основы математики)

1. Участники олимпиады по нанотехнологиям съездили на пятичасовую автобусную экскурсию. Из этого времени час заняло посещение музея, а остальное время автобус ехал со средней скоростью 50 км/ч. Какое расстояние проехал автобус? *(1 балл)*
2. На рисунке приведена мощностная характеристика водородо-воздушного топливного элемента с добавлением частиц платины размера 2 – 4 нм. Какова наибольшая мощность такого элемента при плотности тока, не превышающей 100 мА/см²? *(1 балл)*

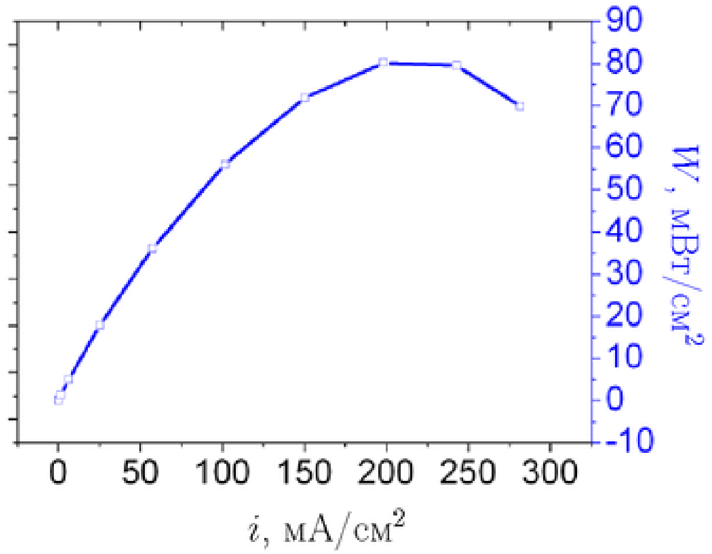
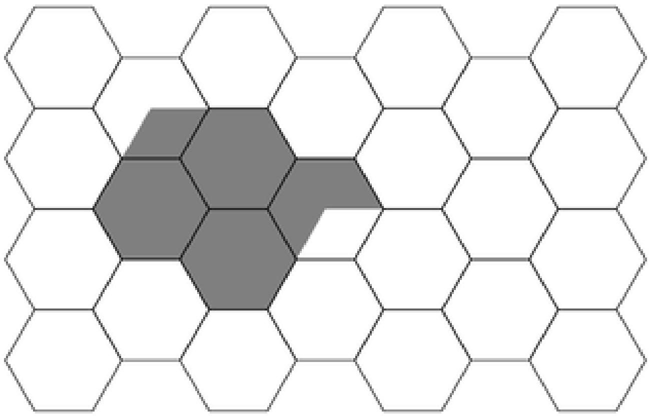


График в задаче 2 взят из автореферата http://www.nanometer.ru/2010/03/27/avtoreferat_208503/PROP_FILE_files_1/dunaev.pdf

3. Смешали 300 мл трёхпроцентного раствора квантовых точек со 150 мл шестипроцентного. Раствор какой «процентности» получился? Обоснуйте такой выбор способа выражения концентрации, при котором задача не потребует знания дополнительных данных (или введете разумные допущения). *(2 балла)*
4. На рисунке изображён фрагмент решётки графена. Во сколько раз площадь заштрихованной области больше площади одной шестиугольной ячейки? Ответ обоснуйте. *(2 балла)*



5. Известно, что диаметр нанотрубки хиральности (*m*, *n*) равен

$$\sqrt{3}a_{C-C}(m^2+mn+n^2)^{1/2}/\pi$$

где *a* = 0.142 нм – кратчайшее расстояние между атомами углерода в графите. Найдите *n*, такое что диаметр нанотрубки хиральности (2, *n*) приблизительно равен 0,414 нм. *(2 балла)*

<u>Вариант 4. Вариативная часть по контролю общих знаний по математике</u>

(если Вы решили не все задания – ничего страшного, главное – покажите, что Вы знаете основы математики)

1. Участники олимпиады по нанотехнологиям съездили на шестичасовую автобусную экскурсию. Из этого времени час заняло посещение музея, а остальное время автобус ехал со средней скоростью 40 км/ч. Какое расстояние проехал автобус? *(1 балл)*
2. На рисунке приведена мощностная характеристика водородо-воздушного топливного элемента с добавлением частиц платины размера 2 – 4 нм. Какова наименьшая мощность такого элемента при плотности тока от 100 до 250 мА/см²? *(1 балл)*

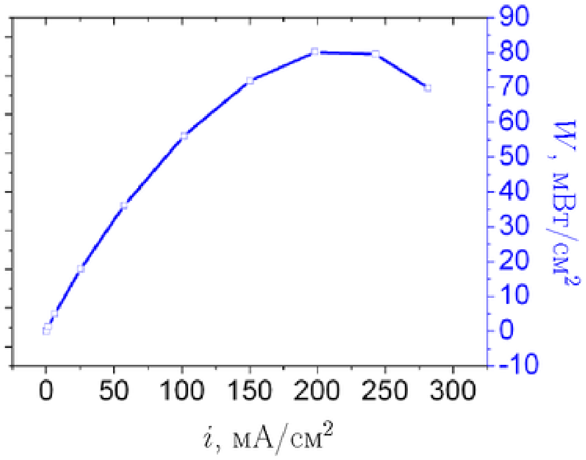
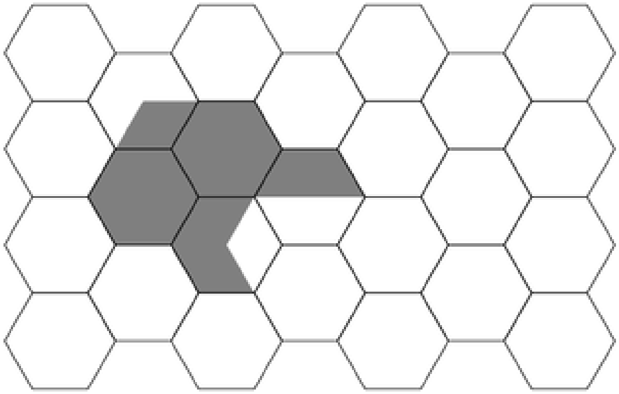


График в задаче 2 взят из автореферата

http://www.nanometer.ru/2010/03/27/avtoreferat_208503/PROP_FILE_files_1/dunaev.pdf

3. Смешали 200 мл трёхпроцентного раствора квантовых точек с 100 мл шестипроцентного. Раствор какой «процентности» получился? Обоснуйте такой выбор способа выражения концентрации, при котором задача не потребует знания дополнительных данных (или введете разумные допущения). *(2 балла)*
4. На рисунке изображён фрагмент решётки графена. Во сколько раз площадь заштрихованной области больше площади одной шестиугольной ячейки? Ответ обоснуйте. *(2 балла)*



5. Известно, что диаметр нанотрубки хиральности (m, n) равен

$$\sqrt{3}a_{C-C}(m^2 + mn + n^2)^{1/2}/\pi,$$

где a = 0.142 нм – кратчайшее расстояние между атомами углерода в графите. Найдите n, такое что диаметр нанотрубки хиральности (3, n) приблизительно равен 0,407 нм. *(2 балла)*

Сложные задания

(если Вы решили не все задания – ничего страшного, главное – решать их на хорошем уровне, показывающем Ваши знания и умения в математике. Задания можно решать в любом порядке, а также частями, за все верные ответы по теме начисляются баллы)

1. Фуллерен C_{60} похож на футбольный мяч. На его поверхности имеется 12 пятиугольных и 20 шестиугольных граней. Все грани – правильные многоугольники. В первом тайме нанофутболист Максим Графитняк три раза пробил мимо ворот противника. Какова вероятность того, что при двух ударах из трех бутса Максима стукнула по пятиугольнику? (стороны и у шестиугольников, и у пятиугольников равны). *(3 балла)*
2. В первые месяцы 2010 опубликовано сообщение о получении образцов *графена* площадью около 1 м^2. Это – серьезное достижение. Ещё пару лет назад образцы размером 10^{-4} м^2 считались крупными. Графен – двумерный углеродный материал, одна изолированная плоскость из структуры графита. Атомы углерода в этой плоскости расположены в вершинах правильных шестиугольников. Каждый атом связан с тремя соседями (sp^2 гибридизация). Оцените вес уникального образца, синтезированного в 2010 году. Расстояние С-С в графене составляет 0.142 нм. *(3 балла)* Дополнительный вопрос: – какова удельная поверхность образца? *(1 балл)*
3. Фуллеренные шарики

Школьники строили модели фуллерена(состоящего из 60 атомов углерода) из пластмассовых шариков. Сначала у них было 2010 шариков в одной большой куче, но среди шариков были бракованные. На первом шаге они выбросили один бракованный шарик, остальные разделили на две кучи. На следующем шаге они из одной из полученных куч выбросили ещё один бракованный шарик, остальные шарики этой кучи разделили на 2 кучи(так что всего стало 3кучи). На третьем шаге из одной из этих трёх куч выбросили бракованный шарик, остальные шарики этой кучи разложили на две новые(так что всего стало 4 кучи) и т.д. Могли ли их действия привести к тому, что все бракованные шарики оказались удалёнными, а остальные шарики разложенными по кучам, в каждой из которых - ровно 60 шариков?

(4 балла)

4. Схемотехника

Схема состоит из 7 устройств и она является безопасной, если при работающем устройстве №1 работает и контролирующее его работу наносенсорное устройство №7. Является ли безопасной схема, про которую известно, что: 1.Если работает устройство №1, то не работает устройство №2. 2. Если не работает устройство №3, то работает устройство №2. 3. Если работает устройство №3, то не работает устройство №4. 4. Если работает устройство №5, то работает устройство №4. 5. Если не работает устройство №5, то не работает устройство №6. 6. Если не работает устройство №7, то работает устройство №6.

(4 балла)

5. Многогранник

Существует ли выпуклый многогранник с 55 гранями, каждая грань которого - выпуклый пятиугольник?

(4 балла)

6. Наноменеджмент

Представьте себе, что Вы стали руководителем фирмы, внедряющей продукты нанотехнологий. У Вас есть три заместителя и есть другие сотрудники, причём у каждого сотрудника имеется один непосредственный начальник и либо нет подчинённых, либо ровно два непосредственно подчинённых. Начальник непосредственного начальника называется прямым начальником. Известно, что подчинённых имеют 50 сотрудников. Докажите, что существует сотрудник, у которого не менее 5 прямых начальников, включая Вас, разумеется.

(4 балла)

7. Множество

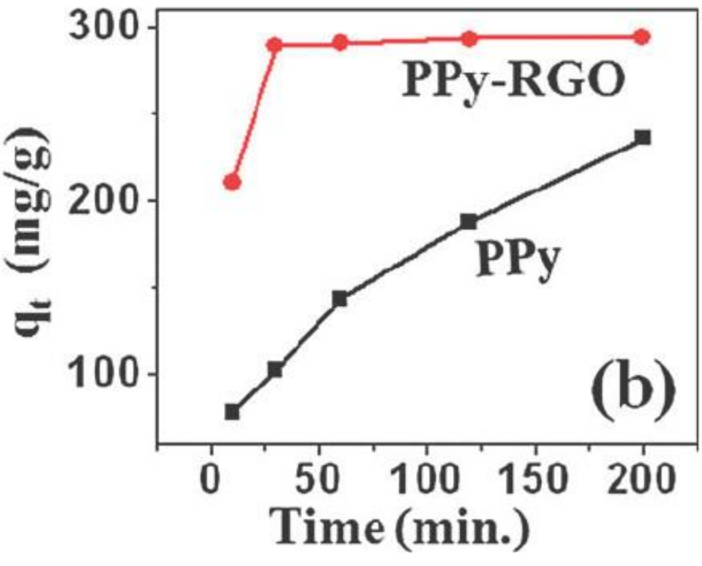
Множество A состоит из X элементов и в нём рассматриваются подмножества в количестве Y. Известно, что каждое из этих подмножеств содержит одинаковое число R элементов и каждый элемент множества A содержится ровно в K из этих подмножеств. Кроме того, любая пара элементов множества A содержится ровно в S рассматриваемых подмножествах. Считая числа R,K,S заданными, найти числа X,Y.

(4 балла)

Очный тур (2011, школьники, математика)

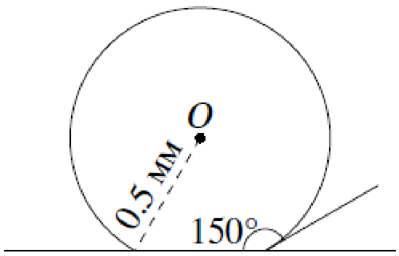
Вариативный блок простых задач

1. **Цианобактерии**. Из точки А в точку Б одновременно начали движение две цианобактерии Synechococcus со скоростями 5 мкм/с и 10 мкм/с. Навстречу им из Б в А в тот же момент начал двигаться управляемый нанопропеллер со скоростью 40 мкм/с. Точки встречи пропеллера с бактериями отстоят друг от друга на 10 мкм. Найдите расстояние между А и Б.
2. **Очистка воды**. Научная группа под руководством проф. Kwang S. Kim в университете города Поханга (Корея) синтезировала композит, предназначенный для очистки воды от ионов ртути. Композит представляет собой полипиррол (polypyrrole, PPy), полимеризованный на поверхности восстановленного оксида графена (reduced graphene oxide, RGO). Для композита была измерена сорбционная емкость, т. е. количество поглощенной ртути на грамм материала. На графике приведена зависимость сорбционной емкости композита PPy-RGO и чистого полипиррола PPy от времени сорбции. У какого из материалов сорбционная емкость была больше через 2 часа после начала эксперимента? Во сколько раз?



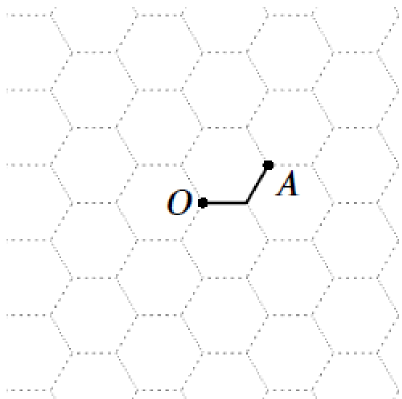
Графики зависимости сорбционной ёмкости от времени сорбции

3. **Капля**. Поверхность материала покрыта гидрофобным покрытием. На поверхности материала лежит капля воды в форме шарового сегмента радиуса 0.5 мм. Найдите площадь контакта капли с поверхностью, если краевой угол смачивания (см. рис) равен 150°.



Капля воды на поверхности

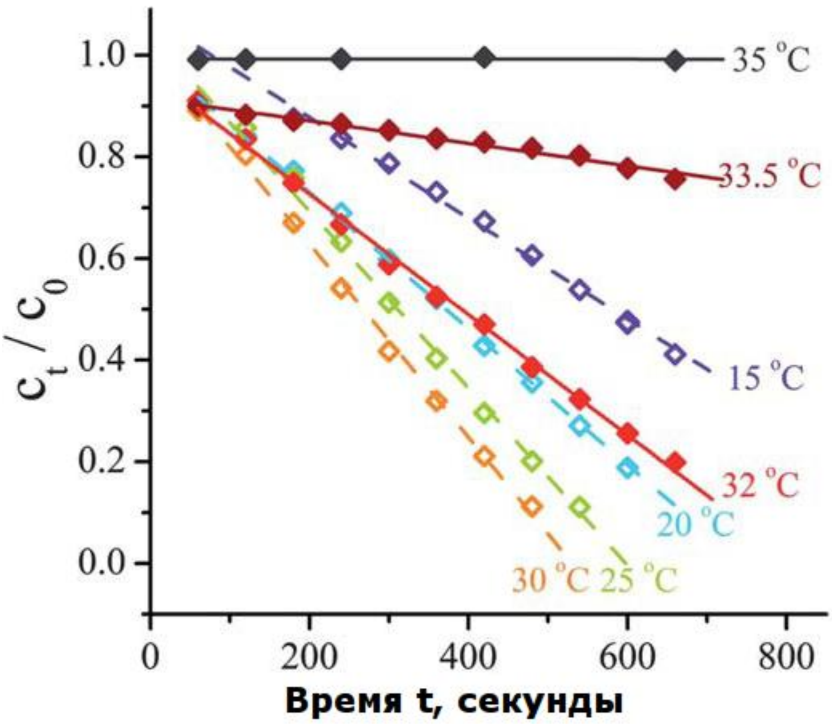
4. **Представьте себе**. В настоящее время в промышленном масштабе производятся массивы из одностенных углеродных нанотрубок диаметром от 1 нм до 2 нм и длиной от 5 мкм до 20 мкм. Одна нанотрубка диаметром 1 нм и длиной 10 мкм весит $2.4 \cdot 10^{-20}$ г. Представьте себе, что из одного грамма углерода (примерно столько углерода содержится в обычном карандаше) изготовили одну нанотрубку диаметром 1 нм. Какова будет длина такой нанотрубки?
5. **Графеновая окружность**. Назовём графеновым расстоянием между двумя атомами решётки графена наименьшее количество переходов по С–С связям, которое надо совершить, чтобы попасть из одной точки в другую. Например, на рисунке слева графеновое расстояние между точками O и A равно двум. Для скольки точек решётки графеновое расстояние до точки O равно 3?



<u>Сложные задачи</u>

1. **Нановолокнистая бумага**. Японские исследователи (см. Optically Transparent Nanofiber Paper, Masaya Nogi, Shinichiro Iwamoto, Antonio Norio Nakagaito, Hiroyuki Yano) разработали нановолокнистую бумагу – прозрачный материал, который предлагают использовать для создания гибких дисплеев. Прозрачность этой бумаги (т.е. процент пропускаемого света) равен 70%. Какова прозрачность двух сложенных вместе листков такой бумаги?

2. **Наночастицы золота**. Недавно Weipeng Lv, Yang Wang, Wenqian Feng, Junjie Qi, Guoliang Zhang, Fengbao Zhang и Xiaobin Fan получили коллоидные частицы золота, стабилизированные декстраном. Были исследованы их каталитические свойства на примере реакции восстановления 4-нитрофенола до 4-аминофенола. Реакция проводилась при разных температурах. На графике изображена зависимость отношения ct/c_0 от времени, где c_t — концентрация 4-нитрофенола в момент времени t. При какой температуре концентрация 4-нитрофенола за 10 минут уменьшается примерно в два раза?



Графики зависимости концентрации 4-нитрофенола от времени

3. **Наноробот-репликатор**. Наноробот умеет строить новых нанороботов — свои точные копии. Он может построить или 1 свою копию за 2 минуты, или 2 своих копии за 3 минуты. Какое наибольшее количество нанороботов может получиться из одного за 5 минут? за 6 минут? за 7 минут? Ответ обоснуйте.

4. **Геометрия графена**. В графене атомы углерода расположены в узлах шестиугольной решётки. Назовём графеновым расстоянием $dC(X,\ Y)$ между атомами решётки X и Y наименьшее количество переходов по связям C–C, которое надо совершить, чтобы дойти из X в Y. Пусть O_1 и O_2 — два атома решётки, такие что прямая O_1O_2 параллельна одному из направлений рёбер решётки, а расстояние $dC(O_1,\ O_2)$ равно 100. Для каких точек решётки выполнено равенство $dC(O_1,\ X)$ +

$dC(X,\ O_2)\ =\ dC(O_1,\ O_2)$? Опишите множество таких точек X и найдите их количество.

5. **Квантовый калькулятор**. У Пети есть квантовый калькулятор, который умеет, как и обычный, за время порядка $\log N$ складывать и вычитать числа, не превосходящие N, а за время порядка $(\log N)^2$ перемножать их. Кроме того, он умеет по алгоритму Шора за время порядка $(\log N)^3$ находить собственный делитель числа N, или сообщать, что такого делителя нет. Напомним, что собственный делитель числа N — это делитель, не равный ни единице, ни N. Как при помощи такого калькулятора за время порядка $(\log m)^3$ найти хотя бы одно решение в натуральных числах x и y уравнения $x^2 + xy + y = m$?

   Примечание. На самом деле квантовый калькулятор с некоторой небольшой вероятностью выдаёт неправильный ответ. Вам разрешается выдавать неправильный ответ, если квантовый калькулятор ошибся.

6. **Нанопродукт**. Рассчитайте величину удельной поверхности Нанопродукта, если известно, что он состоит из частиц с характерным размером (диаметром, длиной ребра,…) 5 нм, и его отдельные «гранулы» имеют форму: а) шара; б) куба; в) цилиндра (d:h = 1:1); г) шестигранной призмы с боковыми гранями в виде квадратов. Плотность Нанопродукта принять равной 4 г/см^3. *(3 балла)* Сколько граммов Нанопродукта в каждом из четырех случаев понадобится, чтобы цепочкой из «гранул», выстроенных в один ряд, замкнуть кольцо вокруг экватора Земли (радиус Земли принять равным 6400 км)? *(1 балл)*

7. **Нанотрубки**. Стенка любой нанотрубки является свернутым вдоль направления вектора R листом графита. R равен векторной сумме nr_1 и mr_2 (r_1 и r_2 задают ячейку графита, n и m – численные коэффициенты, рис. 1).

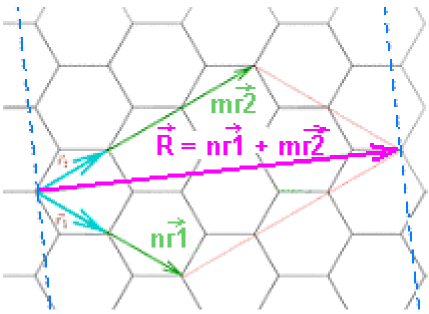


Рис. 1. Нанотрубка как свернутый лист графита. Для получения нанотрубки (n, m), графитовую плоскость надо разрезать по пунктирным линиям и свернуть вдоль направления вектора R. В этом примере n = 2 m = 3

Различают следующие типы нанотрубок:

- «зубчатые», n = m

- зигзагообразные, m = 0 или n = 0

- хиральные нанотрубки (все остальные значения n и m)

Если для трубки $2m + n = 3k$, где k – целое число, то трубка имеет металлическую проводимость, иначе – полупроводник. Найдите (n, m) и определите тип двух нанотрубок, представленных ниже (рис. 2), какой будет их проводимость? *(4 балла)*

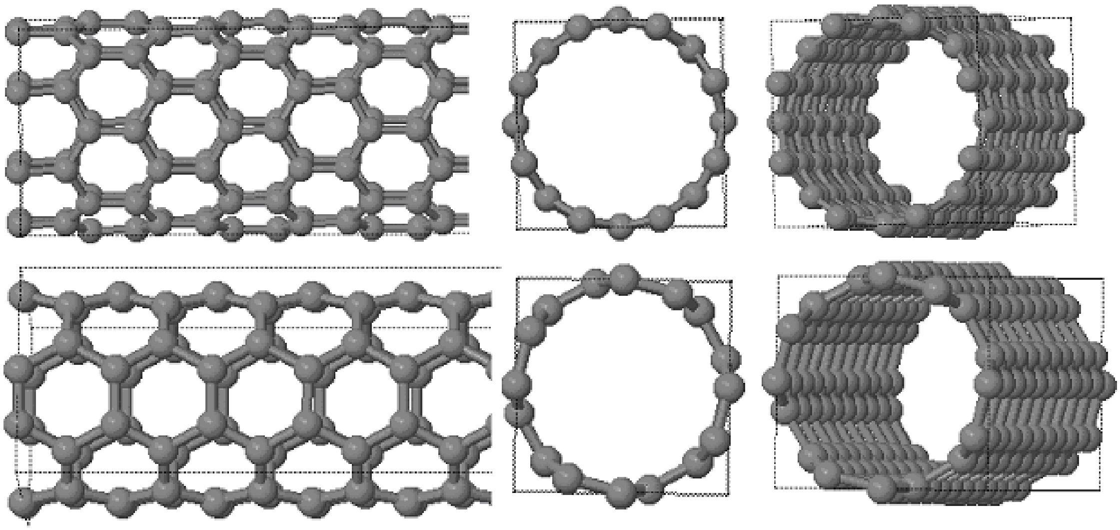
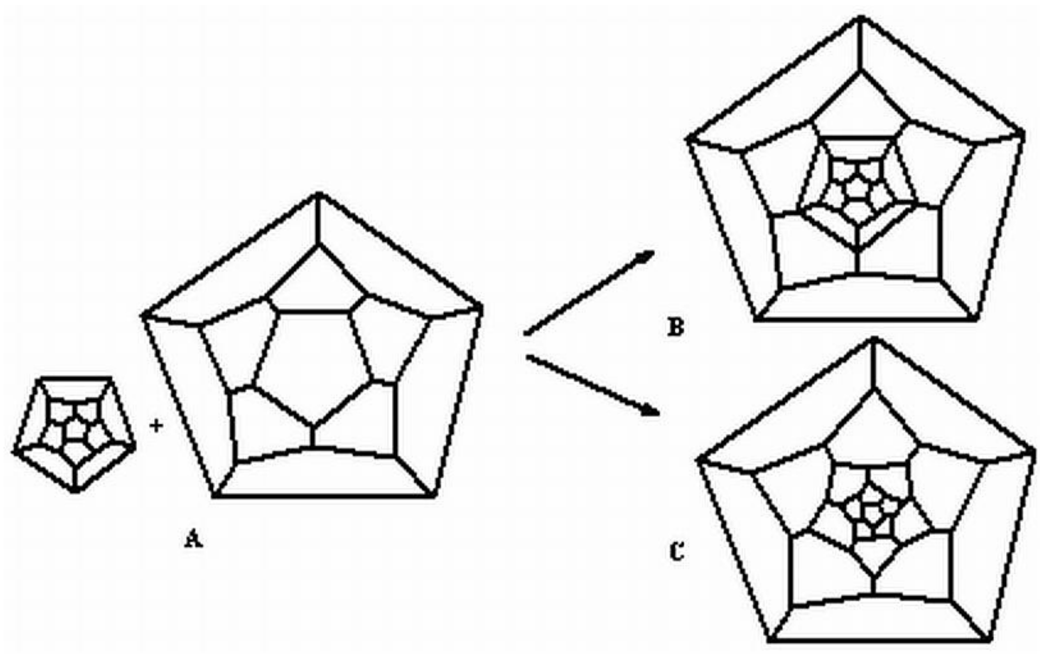


Рис. 2. Типы нанотрубок

8. **Углеродные узоры**. Юный математик Полуэкт решил записать реакцию димеризации фуллерена C_{20} (*A*), предположив, что наиболее вероятными продуктами реакции являются фуллерены. Он приписал им структуры *B* и *C*. При этом Полуэкт поленился расставить двойные связи, считая, что каждый атом углерода на схеме находится в sp^2-гибридом состоянии («плоско» связан с тремя соседними атомами):



Не углубляясь в механизм реакции димеризации, обоснуйте, возможно ли образование нарисованных структур В или С? *(2 балла)* Действительно ли структуры А, В и С являются фуллеренами? *(2 балла)* Являются ли эти структуры аллотропными формами углерода (содержат только углерод)? *(3 балла)* Ответы аргументируете.

Примечание. Для изображения фуллеренов на плоскости используют диаграммы Шлегеля. Диаграмма Шлегеля – это проекция трехмерного многогранника на плоскость. Проекция делается из точки, находящейся над центром одной из граней. На проекции видны все атомы и все грани.

РЕШЕНИЯ

Сверхрешетка (2007, студенческий уровень)

Типичное решение

1. В ГЦК решетке на каждый «атом» А приходится одна октаэдрическая и две тетраэдрические пустоты. Если одна четверть из этих пустот заполнена атомами B, то состав можно выразить брутто-формулой A_2B или $AB_{0,5}$.
2. Наночастица B должна полностью умещаться в тетраэдрической пустоте. Рассмотрим в заполненной тетраэдрической пустоте треугольник ABA: стороны AB равны сумме радиусов A и B(R+r); сторона AA равна 2 радиусам A(2R); угол ABA равен 109 градусов 28 минут, тогда угол BAA равен (180-109.46)/2=35,27. cos(35,27) = R/R+r; 0,816r=0,184R; r/R=0,22. Более подробное альтернативное объяснение: наночастицы типа А максимально приближены друг к другу, т.к. это плотноупакованная структура, а наночастицы типа В равноудалены от наночастиц типа А, составляющих тетрапору. Рассмотрим сечение основания тетраэдра. Центры трех сферических частиц А составляют равносторонннний треугольник, в центре которого находится проекция центра частицы В. Пусть радиус наночастицы А равен а, тогда сторона равностороннего треугольника равняется 2а, а расстояние от центра частицы А до проекции центра частицы В равно $a/\cos 30^o$ и составляет $2a/(3^{1/2})$. Рассмотрим сечение в плоскости, проходящей через одно ребро тетраэдра и центры соседних граней. Ребро тетраэдра равно 2а, так как сферические частицы А касаются друг друга именно в середине ребер, а длины двух других сторон треугольника равны $a*3^{1/2}$ (расстояние от центра частицы А до проекции центра частицы В составляет 2/3 от длины стороны треугольника, т.к. центр частицы В (обозначим S)- центр тяжести треугольника в основании тетраэдра, в котором медианы пересекаются в отношении 2:1, считая от вершины). Найдем медиану тетраэдра $AS = 2*(2^{1/3}/3)*a$. Медианы в тетраэдре пересекаются в одной точке и делятся в отношении 3:1 считая от вершины. Тогда сумма радиусов a + b = 3/4 AS , $a + b = (3^{1/3}/2)*a$, b = a((крень куб. 3/2) - 1) = 0, 22a, то есть оптимальное соотношение между диаметрами составляет $d_B : d_A = 0{,}22 : 1$.
3. Преимущественная ориентация граней коллоидных кристаллов связана с преимущественной ориентацией осей элементарной ячейки решетки относительно канавок рельефа. Предложим возможный механизм, объясняющий причины этого явления. Из теории кинетики роста кристаллов известно, что при малых степенях

пересыщения скорость-лимитирующим процессом является образование затравки – кристалла наименьшего размера, с равной вероятностью способного к дальнейшему росту или распаду на составляющие его частицы. Данный процесс можно рассматривать как энергетический барьер на пути образования кристалла. Также известно, что образование затравок меньшей размерности более выгодно, т.е. энергетический барьер на пути гетерогенного образования одномерного зародыша меньше такового для гетерогенного образования двумерного зародыша, который в свою очередь меньше барьера гомогенного образования трехмерной затравки. Следовательно, первичным процессом образования кристалла будет процесс выстраивания одномерной цепочки квантовых точек вдоль границы стенки и дна канавки. Данная цепочка является зародышем для роста двумерного кристалла на поверхности подложки, построенного по принципу слоя ПШУ. Одновременно с ростом двумерного кристалла на его границе со стенкой канавки начинается процесс роста второго слоя частиц. Результатом данного процесса является ориентация оси симметрии ячейки второго порядка параллельно стенке канавки и оси симметрии ячейки третьего порядка перпендикулярно поверхности. К другим причинам графоэпитаксии относится: различного рода эффекты смачивания, распределения поверхностного натяжения, мениска, перераспределение компонентов (в случае нескольких сортов наночастиц), капилярные явления, возникновение дополнительных напряжений при кристаллизации, взаимодействие с внешними полями (например, плотность-гравитационное поле; поляризация-электрическое поле).

Дендримеры – искусственные фотоантенны (2007, задание для всех)

Авторское решение

1. n-е поколение – 2n пигментов.
2. Время по пути от пигмента m-ого поколения равно mt. Среднее время по всем пигментам (n поколений):

$$\langle t \rangle = \frac{\sum_{m=1}^{n} mt2^m}{\sum_{m=1}^{n} 2^m} = \frac{2^n(n-1)-1}{2^n-1}t$$

При больших n, $\langle t \rangle \to (n-1)t$

3. На маршруте длиной mt (от пигмента m-го поколения до РЦ) доля переданной РЦ энергии составляет pm, число таких маршрутов равно числу пигментов, то есть 2m. Средняя доля энергии, дошедшей до РЦ:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{m=1}^{n} p^m 2^m}{\sum_{m=1}^{n} 2^m} = \frac{(2p)^{n+1}-2p}{(2p-1)\left(2^{n+1}-2\right)} = \frac{p}{2p-1}\frac{(2p)^n-1}{2^n-1}$$

С увеличением размера молекул дендримеров скорость и эффективность передачи энергии уменьшаются.

4. Расстояние между центрами бензольных колец составляет:

r = 2·0.140 + 2·0.154 + 0.120 = 0.708 нм

(0.140 нм – радиус бензольного кольца, 0.154 нм – длина одинарной, 0.120 нм – длина тройной связи). За два поколения расстояние между РЦ и граничным пигментом увеличивается на 1.5 r, то есть на 1 нм. На расстоянии (10–4)/2 = 3 нм уместятся 3 пары, то есть 6 поколений пигментов.

Среднее время переноса:

$$\langle t \rangle = \frac{2^6(6-1)-1}{2^6-1}\cdot 5 = 25$$ пс.

Средняя эффективность:

$$\langle E \rangle = \frac{0.95}{2\cdot 0.95-1}\frac{(2\cdot 0.95)^6-1}{2^6-1} = 0.77$$

Пятое измерение (2008, школьники, разминка)

Авторское решение

1. Пусть:

   d – диаметр одной квантовой точки,

   V – объем одной квантовой точки,

   m – масса одной квантовой точки,

   ρ – плотность материала,

   N – население Земли,

   M – масса кучи, состоящей из квантовых точек около штаб-квартиры Государственной Корпорации «Роснанотех».

   По условию задачи:

   $d = 10$ нм $= 10^{-8}$ м,

   $\rho = 7$ г/см^3 $= 7 \cdot 10^6$ г/м^3.

   Примем, что население Земли в настоящее время составляет 6 миллиардов человек, т.е.:

   $N = 6 \cdot 10^9$.

   Масса кучи, состоящей из квантовых точек около штаб-квартиры Государственной Корпорации «Роснанотех»:

   $M = N \times m = N \times \rho \times V$

   Пусть квантовая точка имеет форму шара, тогда ее объем составляет:

   $V = (4\pi R^3)/3 = (\pi d^3)/6$

   Тогда:

   Куча, состоящая из квантовых точек около штаб-квартиры Государственной Корпорации «Роснанотех», будет весить около $2.2 \cdot 10^{-8}$ г.

   Комментарий: основные ошибки в этой задаче, как ни странно, арифметические, связанные с неправильным вычислением или переводом между единицами измерения (граммами и килограммами, метрами, сантиметрами и нанометрами).

2. Пусть:

   d – диаметр нанотрубки,

   D – диаметр флейты,

   L – длина окружности талии девушки,

   l – длина исходной нанотрубки,

   $l_{ув}$ – длина увеличенной нанотрубки,

   N – число витков увеличенной нанотрубки вокруг талии девушки.

По условию задачи:

$L = 60$ см $= 0.6$ м,

$l/d = 100$ Þ $l = 100d$

Т.к. длина увеличенной нанотрубки равна длине исходной нанотрубки, увеличенной во столько же раз, во сколько диаметр нанотрубки увеличен до диаметра флейты, т.е.:

$l_{ув} = (D/d) \times l = (D/d) \times 100d = 100D$

Из рисунка можно оценить, что диаметр флейты составляет: $D \sim 2$ см $= 0.02$ м, тогда:

$l_{ув} = 100 \times D = 100 \times 0.02$ м $= 2$ м.

Тогда увеличенную нанотрубку можно обернуть вокруг талии девушки:

$N = l_{ув}/L = 2$ м / 0.6 м ≈ 3

Вокруг талии девушки увеличенную нанотрубку можно обернуть около 3 раз.

3. Для решения данной задачи нужно было оценить размер наноробота, радиус острия швейной иглы и радиус иглы атомно-силового микроскопа.

Пусть наноробот при посадке на поверхность занимает площадь в форме круга с радиусом 100 нм, а острие швейной иглы и иглы атомно-силового микроскопа представляет собой также плоскую окружность. Кроме того, допустим, что нанороботы при посадке на острие игл «утрамбовываются» и занимают всю предоставленную им площадь.

Пусть

$r_{нр}$ – радиус площадки, занимаемой нанороботом,

$R_{ши}$ – радиус площадки на острие швейной иглы,

R_{ACM} – радиус площадки на острие атомно-силового микроскопа,

$N_{ши}$ – число нанороботов, которые разместятся на острие швейной иглы,

N_{ACM} – число нанороботов, которые разместятся на острие иглы атомно-силового микроскопа.

Примем, что:

$r_{нр} = 100$ нм $= 10^{-7}$ м,

$R_{ши} = 0.1$ мм $= 10^{-4}$ м,

$R_{ACM} = 1$ нм $= 10^{-9}$ м.

Площадь, занимаемая одним нанороботом:

$S_{нр} = \pi r_{нр}^2 = (10^{-7})^2\pi = 10^{-14}\pi$ м^2.

Площадь площадки на острие швейной иглы:

$S_{ши} = \pi R_{ши}^2 = (10^{-4})^2\pi = 10^{-8}\pi$ м^2.

Площадь площадки на острие атомно-силового микроскопа:

$S_{АСМ} = \pi R_{АСМ}^2 = (10^{-9})^2\pi = 10^{-18}\pi$ м^2.

Тогда число нанороботов, которые разместятся на острие швейной иглы, составляет:

$N_{ши} = S_{ши}/ S_{нр} = 10^{-8}\pi$ м^2 / $10^{-14}\pi$ м$^2 = 10^6$,

а на острие атомно-силового микроскопа:

$N_{АСМ} = S_{АСМ} / S_{нр} = 10^{-18}\pi$ м^2 / $10^{-14}\pi$ м$^2 = 10^{-4}$, т.е. ни одного.

На острие швейной иглы разместится около миллиона нанороботов, а на острие иглы атомно-силового микроскопа – ни одного наноробота.

Комментарий: варианты ответа типа «ну, одного наноробота мы всяко наколем на иглу атомно-силового микроскопа» или «один наноробот все-таки сможет балансировать на одной ножке на острие иглы атомно-силового микроскопа» тоже принимались за правильные!

4. Молекула фуллерена в некотором приближении является шаром. Также шаром, по условию задачи, является фагоцит. Кроме того, в предисловии к задаче было сказано, что размер молекулы фуллерена составляет 0.75 нм. Представим, что при попадании в желудок прожорливого фагоцита молекулы фуллерена «утрамбовываются» таким образом, что они занимают весь объем желудка.

Пусть:

$D_{фул}$ – диаметр молекулы фуллерена, т.е. $D_{фул} = 0.75$ нм ≈ 1 нм $= 10^{-9}$ м,

$D_{фаг}$ – диаметр прожорливого фагоцита,

$V_{фул}$ – объем, занимаемый одной молекулой фуллерена,

$V_{фаг}$ – объем желудка прожорливого фагоцита,

N – число молекул фуллерена в фагоците.

Оценим диаметр прожорливого фагоцита:

$D_{фаг, MIN} = 0.5$ мкм $\leq D_{фаг} \leq 10$ мкм $= D_{фаг, MAX}$, т.е.

$0.5\cdot10^{-6}$ м $\leq D_{фаг} \leq 10^{-5}$ м.

Объем, который занимает молекула фуллерена, составляет:

$V_{фул} = (4\pi R_{фул}^3)/3 = (\pi D_{фул}^3)/6$

Минимальный объем прожорливого факоцита:

$V_{фаг, MIN} = (4\pi R_{фаг, MIN}^3)/3 = (\pi D_{фаг, MIN}^3)/6$

Максимальный объем прожорливого фагоцита:

$V_{фаг, MAX} = (4\pi R_{фаг, MAX}^3)/3 = (\pi D_{фаг, MAX}^3)/6$

Тогда минимальное число молекул фуллерена, которые проглотит прожорливый фагоцит, составляет:

$N_{фул, MIN} = V_{фаг, MIN} / V_{фул} = ((\pi D_{фаг, MIN}{}^3)/6) / ((\pi D_{фул}{}^3)/6) = D_{фаг, MIN}{}^3 / D_{фул}{}^3 = (0.5\cdot10^{-6\ м})^3 / (10^{-9\ м})^3 = 0.125\cdot10^{-18}/10^{-27} \approx 10^{-21}/10^{-27} = 10^6$, т.е. миллион.

$N_{фул, MAX} = V_{фаг, MAX} / V_{фул} = D_{фаг, MAX}{}^3 / D_{фул}{}^3 = (10^{-5})^3\ м^3 / (10^{-9})^3\ м^3 = 10^{-15} / 10^{-27} = 10^{12}$, т.е. триллион.

В зависимости от размера фагоцита, он может проглотить от миллиона до триллиона молекул фуллерена.

5. Автор эмблемы расположил гнома между молекулой фуллерена и Луной, потому что отношение размера гнома к размеру молекулы фуллерена равно отношению размера Луны к размеру гнома, о чем говорит шкала, также показанная на эмблеме.
6. Пусть:

x – сторона сечения графитового стержня,

S – площадь сечения графитового стержня,

L – длина графитового стержня,

c – расстояние между слоями графена в чистом графите,

N – число слоев графена в стержне,

a_{A4} – ширина листа формата А4,

b_{A4} – длина листа формата А4,

S_{A4} – площадь листа формата А4,

$S_{закр}$ – площадь, которую можно закрасить, израсходовав весь графитовый стержень,

N_{A4} – число листов формата А4, которые можно закрасить.

По условию задачи известно, что:

$x = 1$ мм $= 10^{-3\ м,}$

$L = 5$ см $= 5\cdot10^{-2\ м.}$

Из рисунка оценим, что расстояние между слоями графена в чистом графите:

$c \approx 3Å = 3\cdot10^{-10\ м.}$

Пренебрежем размером атомов углерода и будем считать, что вся длина графитового стержня состоит из суммы межплоскостных расстояний.

Число слоев графена в графитовом стержне равно длине стержня, деленному на расстояние между слоями графена, т.е.:

$N = L/c = 5\cdot10^{-2\ м} / 3\cdot10^{-10\ м} \approx 10^8$.

Площадь, которую можно закрасить, израсходовав весь стержень, равна площади сечения графитового стержня, умноженную на число слоев графена в стержне, т.к. при закрашивании квадратика, площадь которого равна площади сечения графитового стержня, происходит отслаивание одного монослоя, составляющего графитовый стержень.

$S_{закр} = S \times N$,

где

$S = x^2$ – площадь сечения графитового стержня, являющегося квадратом.

Следовательно,

$S_{закр} = x^2N = (10^{-3\ м)2} \times 10^8 = 10^2$ м^2.

Размеры листа формата А4 составляют:

$a_{A4} = 21$ см $= 21\cdot10^{-2\ м\ \approx\ 20\cdot10\text{-}2\ м,}$

$b_{A4} = 29.7$ см $= 29.7\cdot10^{-2\ м\ \approx\ 30\cdot10\text{-}2\ м.}$

Тогда, площадь листа формата А4:

$S_{A4} = a_{A4} \times b_{A4} = 20\cdot10^{-2\ м\ \times\ 30\cdot10\text{-}2\ м\ =\ 600\cdot10\text{-}4\ м2} = 6\cdot10^{-2\ м2}$.

Количество листов формата А4, которые можно закрасить описанным в задаче стержнем, составляет:

$N_{A4} = S_{закр} / S_{A4} = 10^2$ м^2 / $6\cdot10^{-2\ м2} \approx 1600$ листов.

Ответ: можно закрасить около 1600 листов формата А4.

Комментарий: у разных авторов задачи количество листов формата А4 получалось разным, т.к. авторы по-разному проводили оценку межплоскостного расстояния между слоями графена. Кроме того, некоторые авторы не пренебрегали размером слоя атомов графита, - такое решение также засчитывалось за правильное.

7. Пусть:

V – объем мыльного раствора,

$l_{ПАВ}$ – длина молекулы поверхностно-активного вещества (ПАВ),

$a_{ст}$ – толщина стенки мыльного пузыря,

$V_{ст}$ – объем стенки мыльного пузыря,

$S_{ст}$ – площадь поверхности мыльного пузыря,

R – радиус мыльного пузыря, при котором толщина его стенки равна длине молекулы ПАВ.

По условию задачи:

$V = 0.01$ мл $= 10^{-5\ л\ =\ 10\text{-}5}$ дм^3 $= 10^{-8\ м3}$.

Согласно оценочным данным длинна молекулы ПАВ составляет:

$l_{ПАВ} \approx 10$ Å $= 10^{-9}$ м,

и этому значению равна толщина стенки образующегося мыльного пузыря:

$a_{ст} = 10^{-9}$ м.

Объем стенки образующего мыльного пузыря, с одной стороны, равен произведению площади поверхности мыльного пузыря на толщину его стенки, а с другой стороны, он равен объему исходной капли мыльного раствора, т.е.:

$V_{ст} = S_{ст} \times a_{ст} = 4\pi R^2 \times a_{ст} = V$

Из полученного уравнения находим, что:

$R^2 = V/(4\pi\ a_{ст}) = 10^{-8}$ м3 $/ (4 \times 3.14 \times 10^{-9}$ м$) \approx 0.796$ м^2,

тогда

$R \approx 0.892$ м ≈ 0.9 м,

а диаметр мыльного пузыря в два раза больше, чем радиус, т.е. 1.8 м.

Толщина стенки мыльного пузыря станет равной длине молекулы поверхностно-активного вещества при диаметре пузыря равном около 1.8 метров.

Комментарий: эта задача оказалась наиболее сложной из разминки. Многие участники Олимпиады даже не брались за ее решение. Мы также засчитывали за верные решения, авторы которых называли условие задачи некорректным, т.к. толщина стенки мыльного пузыря не может быть равна длине одной молекулы ПАВ в связи с тем, что структура стенки мыльного пузыря представляет собой, как минимум, две молекулы ПАВ, между которыми находится молекула воды.

8. Пусть:

D – диаметр окружности клетки,

R – радиус окружности клетки,

L1 – расстояние, которое проползет первый вирус,

L2 – расстояние, которое проползет второй вирус,

t1- время, которое затратит на путь первый вирус,

t2 – время, которое затратит на путь второй вирус,

v1 – скорость первого вируса,

v2 – скорость второго вируса.

По условию задачи

$D = 10$ мкм $= 10^{-5}$ м

Пусть вирус 1 ползет из точки А в точку Б по окружности. Тогда весь его путь составит половину длины окружности клетки, т.е.

$L1 = (2\pi R)/2 = \pi R$

Пусть второй вирус ползет из точки А в точку Б насквозь, по диаметру. Тогда весь его путь равен диаметру клетки, т.е.

$L2 = D = 2R$

По условию задачи вирусы должны встретиться в точке Б одновременно, т.е в пути они проведут одинаковое время, т.е.

$t1 = t2$,

следовательно, т.к. время, затраченное на путь, равно отношению расстояния к скорости:

$L1/v1 = L2/v2$,

следовательно,

$v1/v2 = L1/L2 = \pi R/2R = \pi/2 \approx 1.57$

Для того, чтобы решить вторую часть задачи, в которой спрашивается, каково соотношение объемов вируса и клетки, нужно было найти средние размеры вирусов и клеток. Допустим, что и вирусы, и клетки имеют форму шара.

Пусть:

$V_{кл}$ – объем клетки,

$R_{кл}$ – радиус клетки,

$V_{вир}$ – объем вируса,

$R_{вир}$ – радиус вируса.

Объем клетки составляет:

$V_{кл} = (4\pi R_{кл}^3)/3$

Объем вируса составляет:

$V_{вир} = (4\pi R_{вир}^3)/3$

Тогда соотношение объемов вируса и клетки:

$V_{кл}/V_{вир} = ((4\pi R_{кл}^3)/3)/((4\pi R_{вир}^3)/3) = R_{кл}^3/R_{вир}^3$

Согласно оценочным данным, радиус клеток в среднем можно принять за:

$R_{кл} \approx 10$ мкм $= 10^{-6 \text{ м,}}$

а радиус вируса:

$R_{вир} \approx 10$ нм $= 10^{-8 \text{ м}}$

Тогда:

$V_{кл}/V_{вир} = R_{кл}^3/R_{вир}^3 = (10^{-6})^3/(10^{-8})^3 = 10^{-18}/10^{-24} = 10^6$

(1) соотношение скоростей движения вирусов v1/v2 должно быть равно около 1.57,

(2) соотношение объемов вируса и клетки около 10^6.

9. Предисловие: задача была самой сложной по своей сути, поскольку проверяла знания по теме «геометрическая прогрессия» и «логарифмы».

Пусть:

Масса наноробота m = 0.01 мг = 10^{-5} г.

Длина нанотрубки l = 1 мкм (микрон) = 10^{-6} м.

Диаметр нанотрубки d = 10 нм = 10^{-8} м.

Конечная длина троса L = 1000 км = 10^{6} м.

Время «сварки» соединения / стыка нанотрубок t = 1 мс (миллисекунда) = 10^{-3} с.

Согласно условию, **длина** троса растет в прогрессии 2^N, где N – число шагов, поэтому $L = 2^N l$ или $N = \lg(L/l)/\lg(2) = \lg(10^6/10^{-6})/\lg(2) = 12*\lg(10)/\lg2 \sim$ **40**. Представляете, всего за каких-то 40 шагов будет сделан трос длиной 1000 км!

Количество нанотрубок, формирующих поперечное сечение троса (почему так сложно сказано – смотри дальше!), также растет в прогрессии 2^N, но в этом случае площадь сечения будет равна количеству нанотрубок **в сечении** (не вообще, а именно в сечении), умноженному на их диаметр, то есть $2^N*pi*d^2/4$. Это оценочная величина, верная только в том случае, если в пучке нанотрубок, формирующем трос, нет свободного пространства между трубками (это неверно, но, скажем, пусть трубки «умялись» и приняли шестигранное сечение, равное по площади исходному, тогда сечение будет «сплошным»). Далее, если мы примем, что трос имеет круглое сечение (можно было считать его и квадратным, в принципе), то есть если мы свернем получающуюся при сварке конструкцию в рулон, то легко посчитать диаметр троса: $D = ((4/pi) * 2^N*pi*d^2/4)^{0.5} = 2^{20} * 10^{-8}$ м = 1 сантиметр. Вот такой тонкий и симпатичный трос длиной 1000 км!

Сколько же при этом померло нанороботов? А вот здесь прогрессия и в длину, и в ширину, то есть роботов сдохнет 4^{40} или **$1.2*10^{24}$ штук**. В терминах химии это всего-то два моля (2 N_A, где N_A – число Авогадро). Их масса составит $1.2*10^{24} * 10^{-5}$ г или около **10 триллионов тонн.** Это масса небольшого астероида типа того, который вызвал всепланетную катастрофу и уничтожил в далекие времена динозавров при столкновении с Землей.

Оценка времени изготовления троса подразумевает «взрывной», «бесконечный» и «вахтовый» варианты. В первом из них вся масса роботов кидается вместе делать абсолютно все стыки троса. Теоретически тогда они могут сделать это за 1 мс. Однако если посчитать, сколько энергии выделится за это короткое время, то нет сомнений, что это будет новый Большой Взрыв, который разрушит и трубку, а также похоронит сразу всех нанороботов (куда они денутся из внутренностей троса). При «вахтовом» методе все будет сделано за 40 шагов, то есть за 40 мс, что не сильно по энерговыделению, особенно на последних стадиях, будет отличаться от «взрывного» варианта. При «бесконечном» варианте время равно числу нанороботов, умноженному на длительность работы каждого из них, то есть $1.2*10^{24}*10^{-3}$с, что составит примерно $0.4*10^{14}$ лет, то есть **40 триллионов** лет – никто не дождется конца этого долгостроя!

Кузнецов Сергей Сергеевич

1.

1 вариант: что имеет в виду автор под плотностью материала? Если она вычисляется на основе одной квантовой точки, то есть массу квантовой точки поделили на её объём, то всё очень просто (даже не по себе от этой простоты – а вдруг ловушка?). Итак, нужно умножить 6,6 млрд. квантовых точек (столько приблизительно людей на планете) на объём одной квантовой точки (то есть на $(\pi/6) \times 10^3$ нм^3) и затем умножить на плотность. Переведём нанометры в сантиметры и получим массу кучи: $6.6 \times 10^9 \times (\pi/6) \times 10^3 \times 10^{-21}$ см^3 x 7 г/см$^3 \approx 24 \times 10^{-9}$ г.

2 вариант: если автор под квантовой точкой понимает куб со стороной 10 нм, то объём квантовой точки будет 10^{-18}см^3 , то есть в почти в 2 раза больше, чем в случае сферической формы. Поэтому и масса будет почти в 2 раза больше: $6.6 \times 10^9 \times 10^3 \times 10^{-21}$ см^3 x 7 г/см^3 ≈ 46×10^{-9} г.

Итак, вес кучи будет равен 24 (или 46) нанограмм. Шума, конечно, 6.6 миллиардов человек наделают перед зданием Роснанотех много, но на трудовые планы дворника, убирающего территорию перед корпорацией, куча квантовых точек явно не окажет серьёзного влияния.

2.

Неважно, какой был диаметр у нанотрубки до её волшебного увеличения до диаметра флейты («Волшебная флейта» Моцарта!). Так как диаметр нанотрубки увеличился в такое же число раз, как и её длина, следовательно, отношение длины к диаметру у нанотрубки не изменилось и равно 100 (по условию). Из фотографии можно оценить диаметр нанотрубки: это приблизительно 1.8-2 см. Следовательно, длина нанотрубки будет 180-200 см, или 1.8-2 метра. Вокруг талии 60 см такую нанотрубку можно обернуть три раза.

Интересно, зачем приводятся лишние данные про диаметр нанотрубки до увеличения? Это тест на внимательность?

3.

Нанороботов придумал Роберт Фрайтас. Он считает, что их размеры будут порядка 0.5-3 мкм. Больше 3 мкм нельзя – это минимальный размер капилляров.

Размер острия иглы можно принять 0.1-0.2 мм, то есть 100-200 мкм. Следовательно, на острие швейной иглы может разместиться от 30 до 400 нанороботов.

Острие иглы атомного силового микроскопа (АСМ) порядка 10 нм и меньше. То есть, наноробот в раз сто больше острия иглы. Следовательно, разместиться на острие иглы АСМ не сможет даже один наноробот.

4.

В начале этой разминки приведены размеры молекулы фуллерена C_{60} 0.75 нм. По оценке известного автора Свидиненко, размер фагоцита 20-30 мкм. Это, конечно, большой разброс. Посчитаем, сколько «футбольных мячей» (фуллеренов) поместиться в шаре диаметром 20-30 мкм. Итак, объём фагоцита равен объёму шара с диаметром 20-30 мкм, то есть равен $(\pi/6)$ x $(20^3\text{-}30^3)$мкм$^3\approx$ (4000 – 14000) мкм^3 = (4-14) x 10^{12} нм^3 . Будем считать, что внутри прожорливого фагоцита фуллерены плотно упаковались в гексагональную упаковку, для которой коэффициент плотности упаковки равен 0.74, то есть объём всех фуллеренов внутри фагоцита равен 0.74 x (4-14) x 10^{12} нм^3 = (3-10) x 10^{12} нм^3. Объём фуллерена $(\pi/6)$ x $(0.75)^3$ нм^3 = 0.22 нм^3. Делим объём всех фуллеренов на объём одного фуллерена и получаем количество фуллеренов: (3-10) x 10^{12} нм^3 / 0.22 нм^3 = (14- 45) x 10^{12} = (1.4- 4.5) x 10^{13}. Такой разброс объясняется разбросом в размере фагоцита. Таким образом, фагоцит может проглотить больше 10 триллионов фуллеренов!

5.

По всей видимости, автор эмблемы Щербаков Александр Борисович исходил из такой логики: размер фуллерена приблизительно соответствует 1 нм = 10^{-9} м, а диаметр орбиты Луны вокруг Земли приблизительно равен 1 миллиону километров, то есть 10^9м. Так как автор использует логарифмическую шкалу расстояний, то между этими двумя значениями находится 10^0, то есть 1. 1метр может соответствовать росту гнома (он же карлик, он же nanos).

6.

В литературе встречается значение для расстояния между слоями графита 0.335 нм. Из рисунка выше следует, что расстояние между слоями 0.28 нм. Вот ведь дилемма!

Думаю, что всё же 0.335 нм. Толщину монослоя графена возьмём 0.15 нм. Таким образом, постоянная в направлении нормали к плоскости монослоя равна 0.485 нм (монослой плюс расстояние между слоями). Посчитаем количество слоёв, на которые можно расщепить карандаш. Для этого поделим его длину (5 см= 5 x 10^7 нм) на 0.485 нм: 5 x 10^7 нм / 0.485 нм $\approx 10^8$ слоёв. Площадь каждого слоя равна 1 мм^2. Следовательно, площадь всех слоёв равна 10^8 мм^2. Посчитаем в мм^2 площадь листа формата А4. Будем считать, что лист А4 имеет размер 210х297 мм^2. Его площадь равна 210х297 = 62370 мм^2. Теперь осталось последнее действие – поделить площадь всех слоёв на площадь листа А4: 10^8 мм^2 / 62370 мм$^2 \approx$ 1600 листов формата А4. Это составляет три пачки по 500 в каждой и ещё 100 листов. Правда, не совсем ясно, зачем полностью закрашивать 1600 листов в чёрный цвет, если только Вы не поклонник Малевича, конечно.

7.

Если в результате раздувания капли мыльного раствора в пузырь не происходит изменение плотности раствора, то задача кажется слишком простой (может, где-то «ловушка» типа изменения плотности раствора?). Объём капли $\mathbf{V_{drop}}$ равен объёму стенок пузыря **V**. Этот объём считается как площадь поверхности пузыря $\mathbf{4\pi R^2=\pi D^2}$ (где **D**– диаметр пузыря), умноженная на толщину стенок **W**: $\mathbf{V = \pi D^2 \times W}$. Отсюда находим**D**: $\mathbf{D = (V/ (\pi \times W))^{0.5}}$ **.**

Из литературы известно, что для мыла размер молекулы равен 3-4 нм. Поэтому подставляем W = 3-4 нм.

$\mathbf{D} = (0.01\ \text{см}^3/ (\pi \times (3\text{-}4)10^{-7}\text{см}))^{0.5} \approx 100\text{см} = 1\ \text{м}$

Здесь я учёл, что 1 миллилитр – это 1 см^3

А 1нм =10^{-7}см

Итак, при диаметре пузыря 1м толщина его стенок будет равна длине молекулы ПАВ.

8.

Будем считать, что оба вируса проделывают свои маршруты по кратчайшему расстоянию. Тогда первый вирус проползёт половину окружности с диаметром **D** = 10 микрон, то есть $\mathbf{\pi D/2}$. Второй вирус проползёт расстояние равное диаметру D. Ясно, что отношение скоростей вирусов должно быть равно отношению пройденных расстояний для того, чтобы время движения вирусов было одним и тем же. То есть отношение скоростей равно $\mathbf{(\pi D/2)/ D = \pi/2} \approx 1.57$. Естественно, должен двигаться быстрее тот вирус, что ползёт по поверхности.

Размер клеток человека в среднем составляет 5-6 мкм. Размер вируса гриппа 0.08-0.12 мкм (см. www.gripp.uz). Для определённости будем считать, что размер клетки человека равен 5 мкм, а размер вируса 0.1 мкм. Если считать эти объекты сферами, то отношение их объёмов равно кубу отношения их диаметров: $(5/0.1)^3=125000$. Следовательно, объём клетки, которую атаковали два вируса гриппа, более, чем в 100000 раз больше объёма вируса.

9.

Основные трудности в решении задачи – правильно понять терминологию автора задачи. Это касается слова толщина. Когда говорится, что на втором шаге 2 наноробота сшивают два куска (каждый из которых есть нанотрубка двойной длины и первоначальной толщины) и получают пучок, который в два раза длиннее и в 2 раза толще первоначальной нанотрубки, то это означает, что с одной стороны пучок состоит из четырёх первоначальных нанотрубок, то есть в сечении мы имеем две нанотрубки. Автор при этом считает, что толщина стала в 2 раза больше. Фактом является то, что площадь сечения куска стала в 2 раза больше, а эффективный диаметр больше в $\sqrt{2}$. Как же истолковать слова автора, что толщина стала в 2 раза больше? Либо автор под толщиной понимает площадь сечения (то есть величину измеряемую в квадратных единицах длины, а не в единицах длины, то есть в квадратных метрах, а не в метрах), либо если толщина это всё же линейный размер, то тогда удвоение толщины будет происходить на третьем шаге, а не на втором, как в условии. В общем, коллизия. Нужно что-то выбирать. Рассмотрим первую версию: под толщиной понимается площадь сечения. Рассмотрим, первые шаги по сборке каната. Введём понятие шага: шаг – это операция по соединению двух одинаковых кусков. На каждом шаге будет происходить увеличение в 2 раза только одного из размеров: либо длины, либо толщины. Обозначим длину и толщину первоначальной нанотрубки через L и S соответственно. Напоминаю, что S – это площадь сечения первоначальной нанотрубки, она же толщина. По условию, $L = 1$ мкм, $S = (\pi d^2)/4 = (3.14*10^2\ \text{нм}^2)/4 = 78.5\ \text{нм}^2$.

Для обозначения размеров куска нанотрубки будем использовать запись (L, S).

На первом шаге армия нанороботов произведёт куски нанотрубок (2L, S).

На втором шаге армия нанороботов произведёт куски нанотрубок (2L, 2S).

На третьем шаге - (4L, 2S).

На четвёртом шаге – (4L, 4S).

На пятом шаге - (8L, 4S).

На шестом шаге – (8L, 8S).

На 2n-м шаге - (2^nL, 2^nS).

Найдём шаг, на котором прекращается процесс сборки каната. На этом шаге длина каната должна составить 1000 км, то есть длина первоначальной нанотрубки увеличится в 1000 км / 1 мкм = 10^6м/ 10^{-6}м = 10^{12} раз. То есть на шаге 2n будет выполняться:

$2^n = 10^{12}$

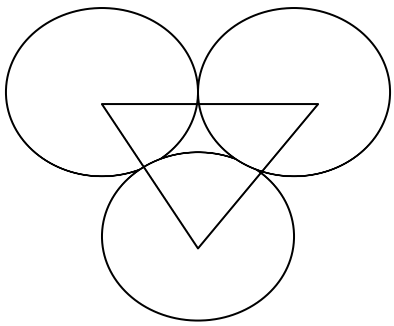
Прологарифмируем левую и правую части :

nlg2 = 12

n = 12 / lg2 =12 / 0.301 ≈ 39.9.

Так как n – натуральное число, то округляем в большую сторону, то есть до 40. В меньшую нельзя, так как тогда длина каната будет меньше 1000 км. А вот если n=40, то на 80-м шаге (то есть на шаге 2n) длина каната будет $2^{40}*1$мкм = $(2^{10})^4$ мкм = $(1024)^4$ мкм = 1099511627776 мкм ≈ 1.1 $*10^{12}$ мкм = 1.1$*$ 10^6 м = 1100 км.

Теперь можно и диаметр посчитать. Конечно, здесь тоже вопрос, с какой точностью посчитать площадь сечения каната. Конечно, можно сказать, что она равна сумме толщин всех нанотрубок, лежащих в плоскости сечения каната. Но ведь нужно учесть зазоры между цилиндрическими нанотрубками. Я решил посчитать, какую часть от общей реальной площади занимают нанотрубки. Для этого я расположил вокруг каждой трубки по шесть соседей – гексогональная упаковка. На рисунке изображена пустота между тремя окружностями. Найдём её площадь. Для этого нужно вычесть из площади треугольника, соединяющего центры окружностей тройную площадь сектора круга, ограниченного углом в 60 градусов. Площадь равностороннего треугольника (а он, конечно, равносторонний) равна $\sqrt{3} * (d^2/4)$, где d –диаметр окружности (первоначальной нанотрубки).



Площадь трёх секторов окружности с углом 60 градусов равна площади половины окружности, то есть $(\pi d^2)/8$.

Площадь зазора обозначим через ΔS.

$\Delta S = \sqrt{3} * (d^2/4) - (\pi d^2)/8 = d^2/4 (\sqrt{3} - \pi/2)$

Заметим, что в среднем на каждую окружность приходится по 2 зазора, так как соседей у окружности 6 и при этом каждый зазор «принадлежит» одновременно трём окружностям.

Посчитаем отношение ***k*** «полезной» площади (площади сечения нанотрубки) ко всей реальной площади (с учётом двух пустот-зазоров):

$\boldsymbol{k} = S / (S + 2\Delta S) = (\pi d^2)/4 / \{(\pi d^2)/4 + d^2/2 (\sqrt{3} - \pi/2)\} = 1/(1 + 2/\pi(\sqrt{3} - \pi/2)) = 1/ (1 + 2\sqrt{3}/\pi - 1) = \pi/(2\sqrt{3}) = 0.91$

Ещё чуть-чуть до ответа.

Сколько первоначальных нанотрубок в сечении каната? Ответ 10^{12} штук, так как именно в 10^{12} раз толщина каната больше толщины первоначальной нанотрубки. Суммарная площадь сечений этих трубок равна $10^{12} * (\pi d^2)/4$. Реальная площадь (с учётом зазоров) будет равна $10^{12} * (\pi d^2)/(4\,\boldsymbol{k})$. Найдём диаметр каната D, который соответствует найденной площади:

$$(\pi D^2)/4 = 10^{12} * (\pi d^2)/(4\,\boldsymbol{k})$$

Отсюда $D^2 = 10^{12} * d^2/\boldsymbol{k}$

И наконец, $D = 10^6 * d / \sqrt{\boldsymbol{k}} = 10^6 * 10$ нм $/ \sqrt{0.91} = (10^7 /0.95)$ нм $= 1.05 * 10^7$ нм $\approx 10^7$ нм (За что же я боролся с этой упаковкой?! Приходится, скрепя сердце, округлять) $= 10^{-2}$ м = 1 см.

Наконец-то финиш! Промежуточный…

Итак, диаметр каната равен 1 см.

Но это только 2 балла.

Через какой промежуток времени армия наноботов соберёт канат?

Сколько времени будет идти сборка? В течение 80 шагов (смотрите пояснение выше). Каждый шаг длится 1 мс (быстро работают нанороботы!!!). Общее время 80 мс. То есть, не успеешь глазом моргнуть в буквальном смысле, а канат готов. Но это возможно только при их фантастической организации труда, при невероятной согласованности. Если правильно, то 3 балла, хотя решать ничего не стоит. Не понятно-с.

Количество всех нанороботов, участвовавших в сборке (намеренно не пишу погибших – как будто мы их убиваем) равна $2*10^{24}$ нанороботов. Их масса равна $2*10^{24}*$ 0.01 мг $= 2*10^{22}$ мг $= 2*10^{19}$ г. Это приблизительно $3*10^{-9}$ массы Земли. В год мировое производство стали равно $6*10^{17}$ г . То есть если сделать нанороботов из стали для этого потребуется всем миром больше тридцати лет на производство нужного количество стали. Долго? Долго! Но зато потом нанороботы за 80 миллисекунд такой канат соберут!!!

Вывод количества нанороботов приведу завтра – заодно и проверю. Спасибо за внимание.

Козлякова Екатерина Сергеевна

1.

Если взять объем квантовой точки за объем шара, то объем квантовой точки $V=4/3*\pi R^3$, где R=D/2 (a D=10нм, тогда $R=5*10^{-9}$ м). Масса = произведение объема на плотность и на кол-во квантовых точек. По данным Википедии (http://ru.wikipedia.org) на февраль 2008 года население земли составляет около 6 млрд 670 млн человек, значит они принесут

$6{,}67 * 10^9$ квантовых точек. Тогда:

МАССА = $(4* 3{,}14 * (5 * 10^{-9})^3$ м^3* $7 * 10^6$ г/м^3*$6{,}67 * 10^9)/3 = 24434{,}4(3) * 10^{-12}$ г = $24{,}4344(3) * 10^{-12}$ кг или всего лишь 24,4344(3) пикокилограмм !!!!!

2.

Согласно рисунку 30см талии девушки приблизительно соответствует 2,5см линейки (я использовала распечатанный вариант фотографии). Тогда отношение 12 к 1. На рисунке флейта имеет диаметр около 4мм. Тогда ее реальный размер около 4,8см.

Диаметр нанотрубки по рисунку около 10нм. Тогда увеличение «нанотрубки до флейты» равно 4,8 миллиона раз! Длина нанотрубки в 100 раз больше диаметра. Тогда её длина 1000нм, т.е. 1мкм или 10^{-6}м. Умножив длину нанотрубки на увеличение, получим:

$10^{-6} * 4{,}8 * 10^6=4{,}8$м. Тогда 4,8/0,6=8 раз. Т.е девушку, изображенную на фотографии, можно обернуть такой нанотрубкой около 8 раз.

3.

«У обычных швейных игл на кончике имеется множество микроиголок. Сравнение с деревьями и земными возвышенностями здесь вполне уместно, поскольку даже у самых острых швейных игл радиус кривизны острия измеряется десятками микрон, в то время как атомарное микроострие имеет толщину порядка десятка нанометров, то есть в тысячу раз меньше».

Журнал «Вокруг света»

Диаметр кончика обычной швейной иглы около 100 мкм. (Я думаю, это наибольшее значение, поскольку я измеряла обычной линейкой свою иголку, протыкая на ней МАЛЕНЬКИЕ дырочки. В итоге, в 1 мм у меня вместилось 11 таких дырочек. Учитывая, что моя игла была достаточно тонкой, и что, протыкая дырочку, я фактически измеряла диаметр не острия, а чуть выше него, можно предположить, что если бы моя иголка была толще и измеряла бы я точнее, то получилась бы средняя цифра около 1/10 мм, т.е 10^{-4} м.)

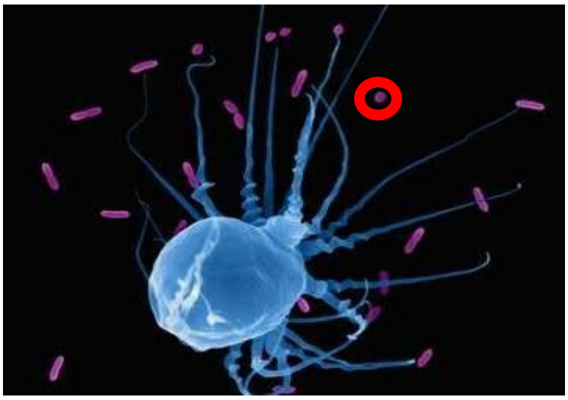
Наименьшее же значение около 10 мкм (если верить «Вокруг Света»), т.е. 10^{-5}м.

Тогда площадь поверхности (по формуле $S = \pi R^2$) кончика швейной иголки где-то между $(\pi*10^{-10})/4$ до $(\pi *10^{-8})/4$ метров.

Пусть наноробот имеет «диаметр» от 10нм (робот меньше 10нм будет слишком уж простым, это будет уже не робот, а его «запчасть») до 100нм (наибольшее допустимое значение для «наномира», дальше начинается «микро»).

Тогда его «площадь» = от $(\pi *10^{-16})/4$ до $(\pi * 10^{-14})/4$ метров.

Тогда, поделив площади поверхности иглы и наноробота, получается, что на острие иглы уместится от 10 тысяч до 100 миллионов нанороботов!!!



Все эти цифры, конечно, приблизительны. Если учесть, что роботы в действительности будут стоять не вплотную, поскольку между ними неизбежно будут зазоры, а также то, что острие швейной иголки на самом деле не гладкое, а состоит из множества мелких «иголочек», и еще то, что мои измерения диаметра кончика и представления о размере нанороботов совсем приблизительные, то цифра будет изменяться.

На острие же иглы АСМ если и уместиться один крохотный наноробот, то это будет чудом, поскольку диаметр острия АСМ менее 10нм и заканчивается несколькими атомами!!! Более крупному же роботу придется стоять на одной нанометровой ножке, учиться сохранять равновесие в жестоком наномире…

4.

Поскольку в условии задачи не сказано, каким именно способом можно получить данные, то существует два варианта решения:

ВАРИАНТ 1

Диаметр фагоцита примерно 12 мкм. Диаметр фуллерена всего лишь 1нм.

Тогда отношение объема фагоцита к объему фуллерена $1728*10^9$, т.е. фагоцит проглотит 1728 миллиардов фуллеренов.

ВАРИАНТ 2

Если имелось ввиду, что определить размеры можно по картинке к заданию (хотя на ней и не фагоцит). Тогда фуллерен (на картинке обведен в кружок. По-моему, остальные продолговатые молекулы – это уже нанотрубки, фуллерен C_{60} ведь круглый…) имеет диаметр (если распечатать и померить линейкой) около 1,2мм, а фагоцит 3,6см.

Их объемы относятся как $4/3*\pi*(1{,}2*10^{-3})^3$ к $4/3*\pi*(3{,}6*10^{-2})^3$,т.е. 27000 раз или в «желудок» к фагоциту поместится около 27000 фуллеренов

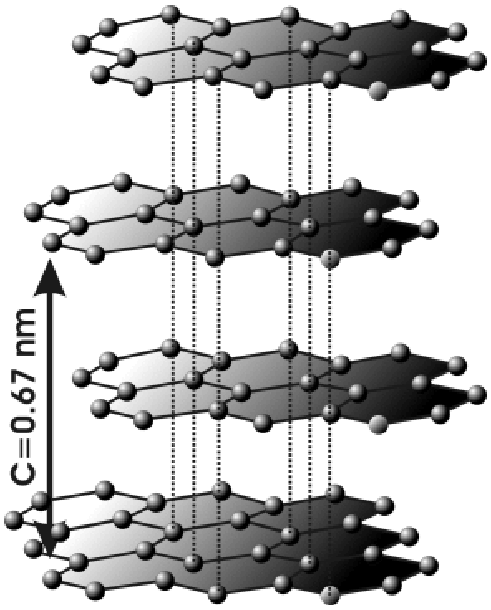
5.

Щербаков Александр Борисович: «.... Показалось забавным: метровый гном соотносится с нанометровым объектом так же, как сам - с диаметром орбиты Луны..."

Больше ничего и не добавишь… Действительно, на рисунке гном находится «над» метровой меткой «линейки», фуллерен «над» нанометром, т.е. гном в миллиард раз больше фуллерена. Луна «над» отметкой миллиард метров. Значит Луна в миллиард раз больше гнома. Вот гном и посередине…

6.

Как видно по рисунку, расстояние между двумя слоями графита, находящимися в «одинаковом смещении» 0,67нм. Тогда расстояние между двумя соседними слоями, включая половину толщины самого графена, равно 0,335нм.



Еще я нашла, что расстояние ***между*** слоями в идеальном кристалле графита составляет 0.3354нм. Нигде не казано, входит ли сам слой графена в эту цифру. Исходя из этого, у этой задачи тоже несколько решений.

ВАРИАНТ1. Возьмем, что слой графена равен нулю. Пусть кол-во графеновых пленок в стержне N. Тогда кол-во промежутков между этими пленками на один меньше, т.е.

$(N-1)*0{,}3354*10^{-9}=5*10^{-2}$

$N=14{,}90\ldots\ldots*10^{7}+1$, т.е. N приблизительно равно $15*10^{7}$ (т.к. я число 14,90… увеличила до 15 и не стала учитывать +1)

Площадь одной пленки - один квадратный мм или $10^{-6}м^{2}$. Умножим кол-во пленок на их площадь и получим площадь закрашенной поверхности:150 $м^{2}$.

Площадь листа формата А4 — 1/16 $м^2$. Тогда, поделив закрашенную площадь на площадь одного листа, получается кол-во закрашенных листов – 2400 листов.

ВАРИАНТ2. Если все-таки в Интернете приводятся данные промежутка МЕЖДУ слоями графена, а толщина слоя (т.к. состоит из единственного слоя графита) равна диаметру атома углерода, т.е.182пм (по данным Википедии (www.wikipedia.org) радиус атома углерода 91пм)

Тогда, если N –кол-во слоев графена, то уравнение имеет вид:

$N * 182*10^{-12}+(N-1)* 0{,}3354*10^{-9} = 5*10^{-2}$

N приблизительно равно $9{,}7\ldots*10^{7}$

Тогда умножим площадь одной пленки на их кол-во, получится, что он закрасят площадь $9{,}7\ldots*10^{7}*10^{-6}=97м^{2}$ Разделим на площадь листа формата А4 (1/16 $м^{2}$), получим, сколько листов закрасит карандаш: 1552 листа.

ВАРИАНТ3 «С помощью атомно-силового микроскопа определяют реальную толщину плёнки графита (она может варьироваться от 0,35 до 0,8 нм для графена)» (из Википедии).

Тогда то же уравнение будет иметь вид:

$N*0{,}35*10^{-9}+(N-1)*0{,}3354*10^{-9}=5 * 10^{-2}$

N приблизительно равно $7{,}3 * 10^{7}$

Тогда закрашенная площадь $7{,}3 * 10^{7}*10^{-6}=73$ $м^{2}$ и кол-во закрашенных листов равно:

73/(1/16)=1168листов

При наибольшей толщине слоя графена (0,8нм), используя те же формулы и расчеты, кол-во листов получается равным 704.

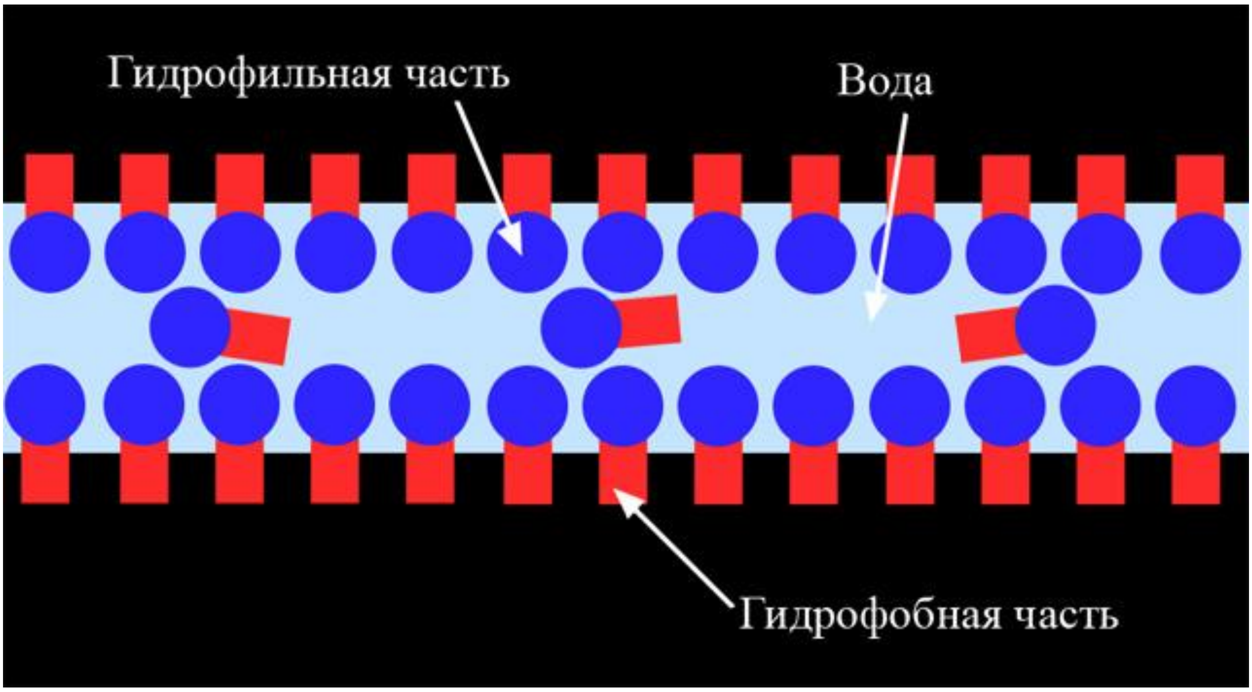
Тогда общий ответ(от самого меньшего(когда толщина графена наибольшая) до самого большего(когда толщина графена вообще равна нулю): ***от 704 до 2400 листов.***

7.

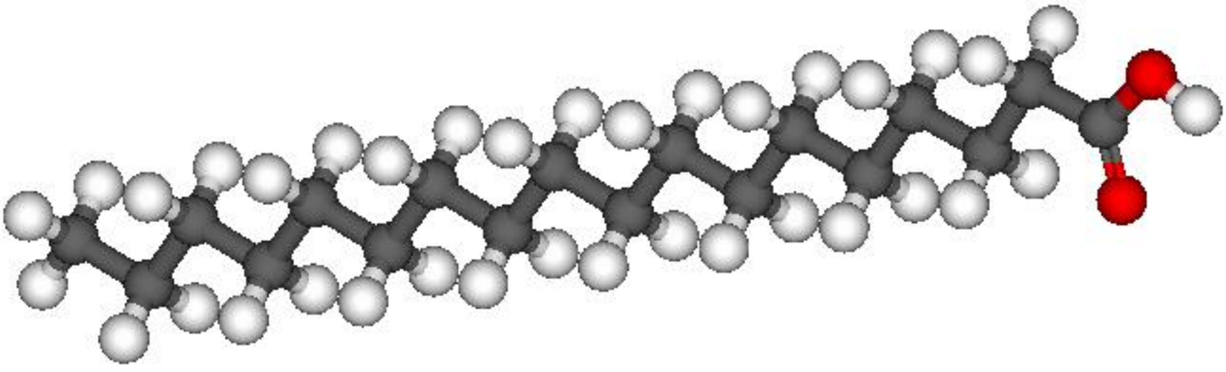
Пленка пузыря состоит из тонкого слоя воды, заключенного между двумя слоями молекул мыла. Эти слои содержат в себе молекулы, одна часть которых является гидрофильной, а другая гидрофобной. Гидрофильная часть привлекается тонким слоем воды, в то время как гидрофобная, наоборот, выталкивается. В результате образуются слои, защищающие воду от быстрого испарения, а также уменьшающие поверхностное натяжение.

(На рис. – «схема» строения пленки мыльного пузыря)

Поверхностно-активное вещество в задаче – мыло. Из школьной химии известно, что мылами называются натриевые и калиевые соли высших жирных кислот. Одна из таких



солей: $C_{17}H_{35}COONa$ (стеарат натрия). Пусть она и будет ПАВ в этом случае.



Схематическое изображение молекулы стеарата натрия.

Найти длину ПАВ (или стеарата натрия) мне не удалось. Тогда я решила попробовать найти ее из изображения выше (понимаю, значение будет совсем уж приблизительным и не совсем достоверным).

Белые кружки на рисунке – молекулы водорода (если измерить линейкой – около 7мм), найти диаметр атома водорода можно – это 0,158нм. Длина всей молекулы на рисунке около 17,5 см. А теперь простая пропорция:

$0,7 *10^{-2}$ ------------ $158 *10^{-12}$

$17,5 *10^{-2}$ ----------- ?, откуда вопрос равен $3950 *10^{-12}$ или если взять приблизительно, то 4нм.

Объем исходной капли - 0.01 миллилитра - и равен «объему стенки» пузыря. Объем стенки равен разности объемов шаров радиусом R+k и R, где k – длина молекулы ПАВ.

Тогда получается уравнение:

$4/3*\pi(R+k)^{3}-4/3*\pi R^{3}=10^{-5}$

R приблизительно равен 4,7 метра! Диаметр тогда 9, 4 метра

Пузырь получился просто огромный!

8.

Первый вирус, движущийся по поверхности клетки, пройдет расстояние, равное половине длины окружности радиуса 5 микрон, т.е. $\pi*10^{-5}$ м

Второй вирус пройдет расстояние, равное диаметру, т.е. 10микрон. Т.к. время одинаковое, по известной физической формуле S=vt, то скорости относятся как расстояния, т.е. как $\pi*10^{-5}$ м к 10^{-5} м , т.е. как π к одному (или 3,14 к 1, тогда 314 к 100 => 157 к 50) Или, если брать совсем приблизительно, то скорость первого в три раза больше скорости второго.

Диаметр вируса гриппа 103 нм (для удобства вычисления возьмем 100нм), тогда его объем $(4/3 *\pi* 10^{-21})м^{3}$

Объем клетки $(2/3*\pi * 10^{-15})$ $м^{3}$

Тогда отношение объемов равно $2*10^{6}$, т.е. клетка больше вируса гриппа по объему примерно в 2 миллиона раз.

9.

Каков будет диаметр троса?

1) Поскольку и длина, и толщина троса увеличивается постоянно в одинаковое кол-во раз, то, поскольку длина троса увеличилась в 10^{12} раз (была 10^{-6}м, стала 10^{6}м), то и его толщина увеличилась во столько же, т.е. стала равна 10км ($10^{-8} * 10^{12}$=10000м)!

2) С другой стороны, получить трос в 1000км из 1мкм, увеличивая каждый «минитросик» в два раза, за целое кол-во этапов просто невозможно. Т.к. сначала трос имеет длину 1 мкм, затем 2мкм, затем 4мкм, затем 8, т.е. его длина увеличивается как геометрическая прогрессия. Тогда, если первый член прогрессии равен 10^{-6}м, частное равно 2, попробуем найти номер члена прогрессии, равного 10^6км или 1000км):

$10^6=10^{-6} * 2^N$ => $2^N=10^{12}$ =>$N=\log_2 10^{12}$ =>$N=12+ 12*\log_2 5$, а это не целое число.

Вообще-то, в задаче не сказано, что длина троса ТОЧНО 1000км, там сказано, что процесс прекращается, когда трос ДОСТИГНЕТ такой длины, значит его длина может быть и больше. Так что, если быть точнее, то длина троса к моменту завершения процесса станет равной 1099511,627776м, а ширина - 10995,11627776м (Эти вычисления я сделала на инженерном калькуляторе. Такой длины и ширины трос достигает после 40 этапа (т.е. его длина и ширина увеличивалась вдвое 40 раз).).

Через какой промежуток времени это произойдет?

Пусть «каждый полуэтап» (при котором происходит увеличение в два раза какого-либо параметра (длины или ширины)) роботы делают одновременно. Тогда первый полуэтап совершится за 1 миллисекунду, второй – за еще 1 миллисекунду, третий -… Т.е. нужно только посчитать, за какое кол-во полуэтапов получился такой трос. В предыдущем вопросе я посчитала кол-во этапов (их 40). Тогда кол-во полуэтапов вдвое больше, т.е. равно 80, тогда роботы сделают эту работу за 80 миллисекунд…

Но может быть и другой вариант. Если роботы «не ждут» окончания предыдущего этапа. Тогда время сборки троса равно времени соединения одного шва, т.е. 1 миллисекунда.

Есть еще третий вариант – когда каждый ждет предыдущего. Но для этого сначала нужно рассчитать кол-во нанороботов, нужных для строительства…

Какова будет масса погибших в процессе сборки троса нанороботов?

В конце сборки каждая нанотрубка (кроме внешних) будет «пришита» к шести соседним нанотрубкам (а их 6 – четыре «по бокам» и две - сверху и снизу), причем для каждого такого пришивания требуется наноробот. Тогда для того, чтобы найти, сколько потребуется нанороботов, нужно найти кол-во нанотрубок, входящих в трос, умножить на шесть и вычесть количество «отсутствующих» швов на внешних нанотрубках.

Самый обыкновенный трос имеет круглое сечение. Диаметр такого сечения был найден в первом вопросе –возьмем приблизительно 10^4метра, чтобы легче было вычислять, а длина – 10^6 м. Найдем объем цилиндра-троса: $\pi*10^8/4*10^6= 0,785*10^{14}=785*10^{11}$

«Объем» нанотрубки равен: $\pi*25*10^{-18}*10^{-6} = 78,5 * 10^{-24}$

Найдем отношение: 10^{36} Это и есть примерное кол-во нанотрубок, которые потребуются для строительства! Если умножить это число на шесть, то получается кол-во нанороботов без вычета тех, которых и не было (т.к. внешние нанотрубки сшиты не со всех концов).

Теперь найдем кол-во внешних нанотрубок. Круг, диаметром 10км состоит из полностью сшитых друг с другом нанотрубок (окончания троса).

Найдем площадь этого круга: $\pi*10^{8}/ 4$

Найдем «площадь сечения» нанотрубки: $\pi*10^{-18}/ 4$ и поделим одно на другое: 10^{26}, умножим на два (т.к. окончания троса то два). Остается найти кол-во боковых нанотрубок. Площадь боковая цилиндра-троса равна произведению длины окружности на длину троса, т.е.: $\pi*10^{4}*10^{6}=3,14*10^{10}$. Пусть боковые нанотрубки не сшиты одной четвертой своей боковой площади. Тогда площадь этой поверхности равна: $\frac{1}{4}*\pi*10^{-9}*10^{-6}$, т.е. $\pi/4*10^{-15}$

Тогда отношение этих площадей $4*10^{25}$

Теперь остается вычесть:

$6*10^{36} – 2*10^{26} – 4*10^{25} = 2*10^{25}(3*10^{11}-14)$ нанороботов потребуется для строительства!

Если все это умножить на 10^{-5}(вес одного наноробота), то получится просто ОГРОМНОЕ число: $2*10^{20}(3*10^{11}-14)$ килограмм – это и будет суммарная масса погибших в результате сборки нанороботов. Если сравнить – то это даже больше, чем масса Земли.

<u>Алешин Глеб Юрьевич</u>

1.

Возьмем количество людей за $6*10^{9}$. Вычислим объем квантовой точки в $см^3$:

$V=(4/3)\pi r^3=(4/3)\pi(d/2)^3$, $d=10^{-8}m=10^{-6}cm$, $V=(4/3)\pi(5*10^{-7})^3=5.2359*10^{-19}$.

Вычислим массу одной точки: $m=\rho V=7*5.2359*10^{-19}=3.6652*10^{-18}g$. Домножив на количество людей получим искомую массу: $M=m*6*10^9=$**<u>$2.1991*10^{-8}$g.</u>**

2.

2.

Примем диаметр флейты за 2см, диаметр нанотрубки за 10нм (судя по рисунку). Тогда отношение диаметров флейты и нанотрубки будет: $2*10^{-2}/10^{-8}=2*10^{6}$. Изначальная длина трубки равна 1000нм=10^{-6}м. Длина трубки после преобразований будет тогда 2 м (очевидно). Разделим это на длину талии и получим кол-во оборотов: 2/0.6=3,(3). Т.е. приблизительно 3 полных оборота.

3.

Примем толщину швейной иглы за 0.01мм, т.е.10^{-5}м или 10^4нм, размер наноробота за $2*10^{-9}$м или 2нм. Тогда площадь, занимаемая одним роботом будет π=3.14нм^2, а площадь острия иглы равна $\pi*(5*10^3)^2=2.5*10^7*3.14=7.85*10^7$нм^2. Тогда кол-во роботов будет $7.85*10^7/3.14=$**<u>$2.5*10^7$.</u>** Примем, что у АСМ острие иглы составляет один атом. Но размеры одного атома меньше, чем наноробота. Тогда кол-во нанороботов на острие иглы АСМ=**<u>0.</u>**

4.

Примем размеры фагоцита за 10мкм=10^{-6}м. Размер молекулы фуллерена 0.75нм=$7.5*10^{-10}$м. Количество фуллеренов равно отношению объемов фагоцита и фуллерена, т.е.: $N=(4/3\pi(d_1/2)^3)/(4/3\pi(d_2/2)^3)=d_1^3/d_2^3=10^{-6}/10^{-10}=$**<u>10000.</u>**

5.

Потому что размеры гнома во столько же больше размеров фуллерена, во сколько размеры Луны больше размеров гнома.

6.

Из данных рисунка примем расстояние между слоями графита за $3*10^{-10}$м=0.3нм. Т.к.площадь сечения грифеля равно 1мм^2=10^{-6}м^2 (очевидно), а длина сердечника равна 5см=$5*10^{-2}$м, то количество площадей по 1мм^2 будет равно отношению длины стержня к расстоянию между слоями графита: $N=5*10^{-2}/(3*10^{-10})=166666667$. Найдем закрашенную площадь: $S=166666667*10^{-6}=166.666667$м^2. Площадь листа А4 равна 1/16 м^2. Тогда кол-во листов равно 166.666667*16=2666.666672, т.е.приблизительно равно **<u>2667.</u>**

7.

8.

Примем вирус за материальную точку, а клетку за шар. Тогда первый вирус проходит $S_1=\pi d$, а второй проходит расстояние равное $S_2=d$. $V=S/t$, $t_1=t_2$. Соотношение скоростей равно S_1/S_2. Тогда $S_1/S_2=\pi=3.14$. Диаметр вируса гриппа равен 100нм, диаметр клетки равен 10^5нм. $V_{вируса}=4/3\pi*(5*10^{-8})^3=5.236*10^{-22}$, $V_{клетки}=4/3\pi*(5*10^{-5})^3=5.236*10^{-13}$, $V_{клетки}/V_{вируса}=$**<u>10^9</u>**

9.

Т.к. после всех преобразований нанотрубка увеличивается в диаметре и в длине в одинаковое количество раз, то отношение длины к диаметру остается прежним. Тогда решим пропорцию:

1000нм/10нм=1000км/Хкм; очевидно, Х=**<u>10км</u>.**

Судя по условию, очевидно, что конечная длина равна 10нм*2^n=1000км, где n – кол-во операций, сделанных нанороботом. Решим это уравнение: $10^{-9}*2^n=10^6$, $2^n=10^{15}$, n=50. Значит время, затраченное на создание троса равно $10^{-6}*50=$**$5*10^{-5}$**.

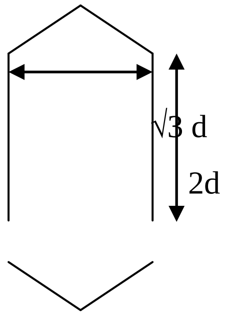
Количество погибших роботов равно 1+2+4+8+… Заметим, что это геометрическая прогрессия со знаменателем 2 и кол-вом членов 50. Тогда по формуле суммы геометрической прогрессии $N=(1-2^{50})/(-1)=1.126*10^{15}$. Теперь по массе одного робота (10^{-6}г) найдем массу погибших: $10^{-6}*10^{15}1.126=$**$1.126*10^{9}$кг.**

Подсчет ядерной материи (2008, школьники, физика, геометрия)

Кузнецов Сергей Сергеевич

1. Итак, нанотрубка типа «зигзаг» получается, как видно из рисунка, сворачиванием слоя графена вокруг направления (5,0) (она же хиральность). Чтобы определить количество нейтронов в нанотрубке, нужно посчитать количество атомов в ней. Чтобы посчитать количество атомов углерода, нужно посчитать количество гексагенов.

Обозначим сторону гексагена через d. Легко показать, что вдоль трубки на один гексаген приходится расстояние $\sqrt{3}\,d$, а поперёк трубки на два слоя гексагенов в среднем $(2d+d)/2 = (3/2)d$.



Посчитаем количество гексагенов в одном слое вдоль трубки:

$$N/(\sqrt{3}d),$$

где N – длина в нанометрах, d – сторона гексагена в нанометрах.

Количество слоёв вдоль нанотрубки (то есть количество строк на представленном рисунке) равно $\pi b/((3/2)d) = 2\pi b/(3d)$,

Так как πb – это длина стороны листа графена, которая после сворачивания принимает форму окружности.

Посчитаем общее число гексагенов: умножим количество гексагенов в одном слое на количество слоёв (строк). Получим:

$$N/(\sqrt{3}d) * 2\pi b/(3d) = (2\pi/(3\sqrt{3}d^2))bN = 60bN$$

Здесь я подставил вместо d известное значение для расстояния между атомами углерода в монослое графита (графена), равное 0.142нм. Каким-то счастливым образом получилось 60 с большой степенью точности. Красивый коэффициент, если учесть, что он совпадает с количеством атомов в фуллерене.

Посчитаем теперь количество атомов углерода. Конечно, это не есть количество гексагенов, умноженное на 6, то есть 360bN, так как каждый атом углерода в гексагене «принадлежит» одновременно трём гексагенам. Следовательно, произведя умножение числа гексагенов на 6, мы посчитали каждый атом углерода трижды. Следовательно, истинное число атомов в три раза меньше, то есть 120bN. Это правильное значение, если не учитывать «краевые» эффекты ведь на открытых концах трубки есть атомы, которые принадлежат только одному гексагену или двум гексагенам. Глядя на рисунок, нетрудно понять, что таких на каждом конце трубки по $2\pi b/(3d)$ атомов, принадлежащих только одному гексагену и столько же атомов, принадлежащих двум гексагенам.

Посчитаем насколько мы занизили общее количество углеродов, на приняв во внимание краевой эффект:

Посчитаем для одного конца трубки. Если атом принадлежит трём гексагенам, то одному гексагену он принадлежит на 1/3, а если принадлежит одному гексагену, то принадлежит ему целиком. Как видим разность составляет 2/3 на каждый атом. Следовательно, для таких атомов на конце трубки разность составит $2\pi b/(3d) * (2/3) = 4\pi b/(9d)$.

Если же атом принадлежит двум гексагенам, то одному гексагену он принадлежит на ½, то есть поправка составляет ½ - 1/3 = 1/6. Следовательно, для таких атомов разность на конце трубки поправка составит $2\pi b/(3d)* 1/6 =\pi b/(9d)$. Складываем поправки и получаем:

$$4\pi b/(9d) + \pi b/(9d) = 5\pi b/(9d)$$

Вспоминаем, что это для одного конца трубки, а их у трубки, как известно. Два. Значит полная поправка количества атомов углерода в 2 раза больше, то есть равно:

$$10\pi b/(9d)$$

Итак, количество атомов углерода равно:

$$120bN+10\pi b/(9d)$$

Оценим поправку: $10\pi b/(9d) \approx 25b$

Это составляет $25b /(120bN) \approx 1/(5N) = 2*10^{-4} = 0.02\%$

Здесь в качестве N я использовал значение 1мкм, которое Вы приводите в других задачах.

В очередной раз я потерял драгоценное время «впустую», но что-то не давало мне покоя, а вдруг поправка существенна. Но может быть, мне зачтут балл или два, чтобы поддержать энтузиазм.

Теперь считаем число нейтронов. Для этого нужно знать, сколько нейтронов в одном атоме. Ну, это знает каждый порядочный школьник: в каждом атоме ^{12}C по 6 нейтронов. Но нужно рассмотреть природную смесь изотопов углерода. Я выяснил, что природная смесь изотопов углерода состоит из двух стабильных изотопов ^{12}C (на него приходится

98.93% всех атомов) и ^{13}C (его доля 1.07%) и одного нестабильного ^{14}C, на который приходится 10^{-12} часть всех атомов. В атоме изотопа ^{13}C содержится 7 нейтронов.

Всего нейтронов в нанотрубке будет:

$0.9893*120bN*6 + 0.0107*120bN*7 = (0.9893*6 + 0.0107*7)120bN=$

$=6.01* 120bN =721bN$

Как видим, учёт присутствия ^{13}C в нанотрубке приводит к поправке в 1/720-ю, то есть меньше 0.15%.

2. Тип гибридизации в нанотрубке $sp2^{+x}$, $0<x<1$. Чем меньше диаметр нанотрубки, тем больше x.
3. Известно, время, за которое распадается половина радиоактивных атомов, не зависит от количества атомов и называется периодом полураспада ($T_{1/2}$). Это записывается так:

$N(t)/ N_0 = 2^{-t/T1/2}$.

Требуется найти, насколько уменьшится, то есть $\Delta N=N_0 - N(t)$.

Найдём: $\Delta N=N_0 - N(t) = \Delta N=N_0 - N_0\, 2^{-t/T1/2} = N_0(1- 2^{-t/T1/2})$.

Подставим значение периода полураспада изотопа ^{14}C , равное $T_{1/2}$ = 5730 лет, и $t=10^9$ лет: получим $t/ T_{1/2}= 10^9/5730 = 174520$,

Следовательно, $\Delta N= N_0(1- 2^{-174520}) = N_0$ с точностью до 50000-го знака после запятой.

Посчитаем $2^{-174520}$:

$2^{-174520} = (2^{-10})^{17452}= 10^{-52350}$.

Выходит, что через миллиард лет все имеющиеся атомы углерода должны распасться.

Посчитаем, сколько же таких радиоактивных изотопов в одной нанотрубке. Умножим общее число атомов в нанотрубке на 10^{-12}:

$$120bN*10^{-12} = 1.2*10^{-10}bN.$$

Оценим в абсолютном значении количество атомов ^{14}C. Опять возьмём d=10 нм, N= 1мкм = 1000 нм. Тогда получим:

$1.2*10^{-10}bN=1.2*10^{-10}*10*1000 \approx 10^{-6}$

Что же выходит, что в нанотрубке 10^{-6} атомов ^{14}C, то есть вероятность наличия одного атома ^{14}C равна одной миллионной, то есть можем достаточно уверенно заявлять, что количество нейтронов в нашей нанотрубке не уменьшится и через миллиард лет ни на один нейтрон, так как нет радиоактивных атомов в ней. Если конечно, не подвергать нанотрубку каким-либо воздействиям.

Беспокоит меня терминология не на шутку. В статье, которую я Вам прикладываю, я обнаружил изображение нанотрубки структуры «зигзаг», у которой вид такой же, как у зубчатой, а у структуры armchair такой вид, как у Вас на рисунке у «зигзаг». Вот это меня беспокоит. Что-то я здесь, возможно, не понял.

<u>Козлякова Екатерина Сергеевна</u>

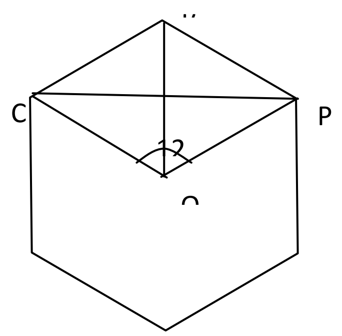
1. Если b нм – диаметр нанотрубки, то длина поперечного сечения (окружности) L равна:

$L=2\pi*(b/2)=\pi b$.

Т.к. в условии нанотрубка «типа зигзаг», то стороны шестиугольников, её составляющих, должны быть параллельны оси трубки, и она будет «сворачиваться» в направлении вектора R.

Как видно по рисунку (Общему), длина сечения тогда будет складываться из произведения длины отрезка АВ на кол-во этих отрезков (или кол-во шестиугольников в сечении). Длину АВ можно найти.

Расстояние между ближайшими атомами углерода в шестиугольниках составляет 0,142 нм, обозначим его за а. (На рис справа, а=ОС=ОР=КР=СК, т.к. правильный шестиугольник). Углы КОР и КОС по 60 градусов (т.к. КОС и КОР – правильные треугольники) Значит угол СОР равен 120 градусов. Тогда нужный в задаче отрезов СР (или АВ на рисунке с вектором) можно найти по теореме косинусов:



$CP^2= a^2 + a^2 - 2a^2 * \cos 120^0$

CP = a * SQR(3)= 0,142*SQR(3) нм

Тогда $L = k * 0,142 *10^{-9} * SQR(3) = \pi * b$,

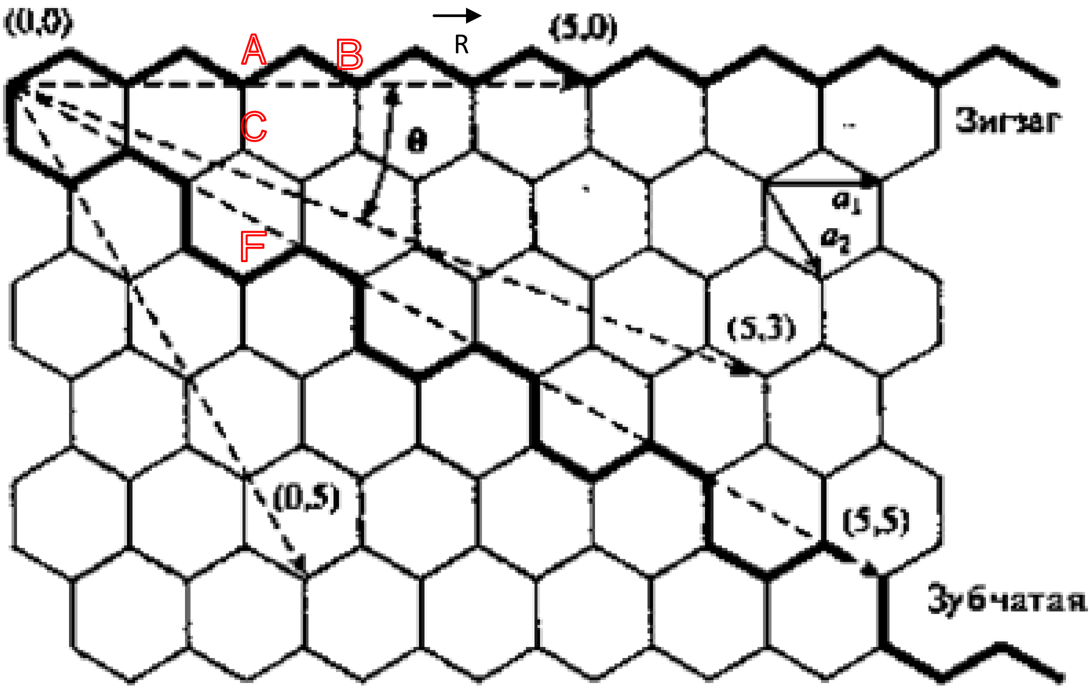
Откуда К (кол-во шестиугольников в сечении) равно

$K= (\pi*b)/ (0,142*10^{-9} * SQR(3)) \approx 12,8 *b* 10^9$

Разобьем плоскость рисунка на зигзаги. В каждом зигзаге (например на рисунке сверху – это верхняя граница) содержится 2К атомов углерода.

Тогда, чтобы найти, сколько в нанотрубке атомов углерода остается найти, сколько таких зигзагов в нее входит.

Пусть нанотрубка оканчивается «законченными» шестиугольниками (нет недостающих сторон).



Тогда длина нанотрубки складывается из суммы

1) произведения длины отрезка AC (красном на ОБЩЕМ рисунке) на кол-во отрезков такой длины, «попадающихся» на пути продольного сечения;
2) произведения длины отрезка CF на кол-во отрезков такой длины, «попадающихся» на пути продольного сечения;

Длина отрезка CF в два раза больше длины отрезка AC (диагональ, проходящая через центр в правильном шестиугольнике)

Наиболее простой случай, когда кол-во отрезков, равных AC совпадает с кол-вом отрезков, равных CF. Тогда, если G – это кол-во, то длина нанотрубки равна

(AC+CF)* G = N (N по условию – длина нанотрубки), откуда G равно $G=N/(3a)=N/(3*0,142*10^{-9})$. А кол-во «зигзагов» в продольном сечении тогда равно 2G.

Кол-во атомов углерода в нанотрубке равно произведению кол-ва атомов в «зигзаге» (2К) на кол-во этих «зигзагов» (2G):

4 * π * b * N

КОЛ-ВО = 4 K*G = a * SQR(3) * 3 * a = четыре «пи», деленное на три корня из трех a в квадрате, и умножить на b и N.

Если подставить цифры, то получится приблизительно 120 *10^{18} * b * N.

Природный углерод состоит из двух стабильных изотопов - ^{12}C (98,892%) и ^{13}C (1,108, а также следов радиоактивного изотопа ^{14}C , который занимает совершенно ничтожную, 10-12 часть от современного углерода земной атмосферы и почвы (около 0,0000000001%). ^{12}C содержит в атоме 6 нейтронов, а ^{13}C - 7, в ^{14}C – 8. Углерода

Тогда кол-во нейтронов в нанотрубке равно:

(6*0,98892+ 7*0,01108+8*0,00000000001) * 120 *10^{18} * b * N ≈

≈ **721,3392* 10^{18}* b * N.**

(В случае, когда кол-во отрезков AC и CF различно, ответ будет ненамного отличаться, потому что максимальное различие в количестве этих отрезков – единица.(т.к. отрезки чередуются). Тогда уравнение будет иметь вид

(AC+CF)* G – CF(или AC) = N, величины CF и AC – очень маленькие и существенно на ответ не повлияют. Также изменится немножко уравнение количества (в нем вместо 2G будет 2G+1), но т.к. величина G – довольно большая, то на ответ это также заметно не повлияет (только если нанотрубка ОЧЕНЬ короткая и содержит малое количество «зигзагов»)

2. Как известно, твердый углерод может существовать в виде различных аллотропных модификаций, отличающихся друг от друга типов гибридизации валентных электронов.

Например, графит построен из плоских слоев углеродных атомов в состоянии sp^2 гибридизации. Помимо основных аллотропных форм углерода (алмаз, графит, карбин) в последнее время был открыт ряд других углеродных структур (в том числе и нанотрубки), которые характеризуются размерами порядка нанометра и отличаются различным типом гибридизации. Причем не все нанообъекты имеют гибридизацию, как и у макрообъектов, из которых они, фактически, состоят. Так, углеродные связи в нанотрубках и фуллерене можно характеризовать дробной степенью гибридизации sp^n валентных электронов (n от 2 до 3).

3. Период полураспада $^{14}{}_{6}C$ T½= 5730±40 лет. В результате распада углерод переходит в азот

$^{14}_{6}\mathrm{C} \rightarrow {}^{14}_{7}\mathrm{N} + e^{-} + \bar{\nu}_{e}$. Но на количество нейтронов это совершенно не влияет, поэтому нейтронов в нанотрубке сколько было, столько и останется (сколько бы времени не прошло – миллиард или больше лет).

Алешин Глеб Юрьевич

1. Расстояние между соседними атомами углерода в графите равно 0.142 нм. Т.к. трубка имеет тип зигзаг, то расстояние межу соседними атомами в одной плоскости, перпендикулярной оси равно $\sin 120^{o}*0.142/\sin 30^{o}=0.246$нм. Длина окружности в одной плоскости равна πb. Примем приближение, что длина окружности равно n*0.246, где n – кол-во атомов в одной плоскости. Тогда n=πb/0.246. Расстояние между плоскостями равно расстоянию между атомами углерода, т.е.0.142нм. Тогда кол-во плоскостей будет N/0.142. Вычислим из этого кол-во атомов: A=πbN/0.0349≈90bN. Примем, что в природном углероде 98.89%^{12}C и 1.11%^{13}C (Источник: Ю.Д.Третьяков, Неорганическая химия). Тогда количество нейтронов будет 0.9889*6bN+0.0111*7bN=**6.0111bN**.
2. В нанотрубке реализуется **sp2** гибридизация, т.к.она состоит из бензольных колец.
3. Период полураспада ^{13}C – 12600 лет. Т.к.12600 лет очень малы сравнительно с 1000000000 лет, то положим, что ^{13}C распадется весь. Тогда количество нейтронов через 1000000000 лет будет **6bN**, изменение количества нейтронов будет 0.0111bN.

Моторчик (2009, математика)

1. Более подробное описание эксперимента можно найти в книге [1], а мы только приведём вычисления. Обозначим через L длину пропеллера. Тогда $L_2 = L - L_1$ и

$S_q = L^3_1 + L^3_2 = L^3 - 3L^2L_1 + 3LL^2_11$ (в справедливости второго равенства легко убедиться, если перенести L^3_1 в правую часть и заметить, что $L^3-3L^2 L_1 +3LL^2_1 -L^3_1 = (L-L_1)^3= L^3_2$).

$$S_q = \frac{3\tau \operatorname{acosh}(h/r)}{4\pi\eta\omega} \quad (1)$$

$$L_1 = \frac{3L^2 - \sqrt{12LS_q - 3L^4}}{6L} \quad (2)$$

$$\begin{gathered} e^u + e^{-u} = 2h/r \\ re^{2u} - 2he^u + r = 0 \\ e^u = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - r^2}}{r} \end{gathered} \quad (3)$$

$$e^u = \frac{h + \sqrt{h^2 - r^2}}{r} \quad (4)$$

$$u = \ln \frac{h + \sqrt{h^2 - r^2}}{r} = \ln\left(\frac{h}{r} + \sqrt{\left(\frac{h}{r}\right)^2 - 1}\right) \approx 1{,}64 \quad (5)$$

$$S_q = \frac{3\tau u}{4\pi\eta\omega} \approx 1{,}55 \cdot 10^8 \text{ нм}^3 \quad (6)$$

$$L_1 = \frac{3L^2 - \sqrt{12LS_q - 3L^4}}{6L} \approx 226 \text{ нм}$$

По условию задачи, это выражение равно **(1),** то есть выражается через данные в условии величины. Для нахождения L_1 осталось

решить квадратное уравнение $3LL_1^2 - 3L^2L_1 + L^3 - S_q = 0$ относительно L_1 . Его дискриминант равен $D = 9L^4 - 12L(L^3 - SQ) = 12LS_q - 3L^4$, Следовательно, меньший корень уравнения равен **(2)**

Найдём теперь u = acosh(h/r). Можно или воспользоваться калькулятором, или снова составить квадратное уравнение: **(3)**

Поскольку мы ищем положительное значение u, выбираем больший корень **(4)**

Будем выражать длины в нм, силы в пН, а время в секундах. Тогда 1Па • с = 10^{-6} пН•с/нм^2

Теперь **(5)**

Меньшинство (2009, математика)

1. Для получения операции "ИЛИ" (∨) достаточно в приведённой в условии схеме "0" заменить на "1". Отрицание реализуется нижней частью этой схемы. Требуемая функция большинства равна **(1)**, то есть выражается через уже использованные операции.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \bigvee_{1 \le i < j < k < l \le 7} x_i \wedge x_j \wedge x_k \wedge x_l, \qquad (1)$$

$$\begin{gathered} z_3 = (x_2 \wedge \overline{y_2}) \vee (\overline{x_2} \wedge y_2) \\ z_2 = ((x_1 \wedge y_1 \vee \overline{x_1} \wedge \overline{y_1}) \wedge x_2 \wedge y_2) \vee ((x_1 \wedge \overline{y_1} \vee \overline{x_1} \wedge y_1) \wedge \overline{x_2 \wedge y_2}) \\ z_1 = (x_1 \wedge y_1) \vee (y_1 \wedge x_2 \wedge y_2) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge y_2) \end{gathered} \qquad (2)$$

Формулы 1 и 2

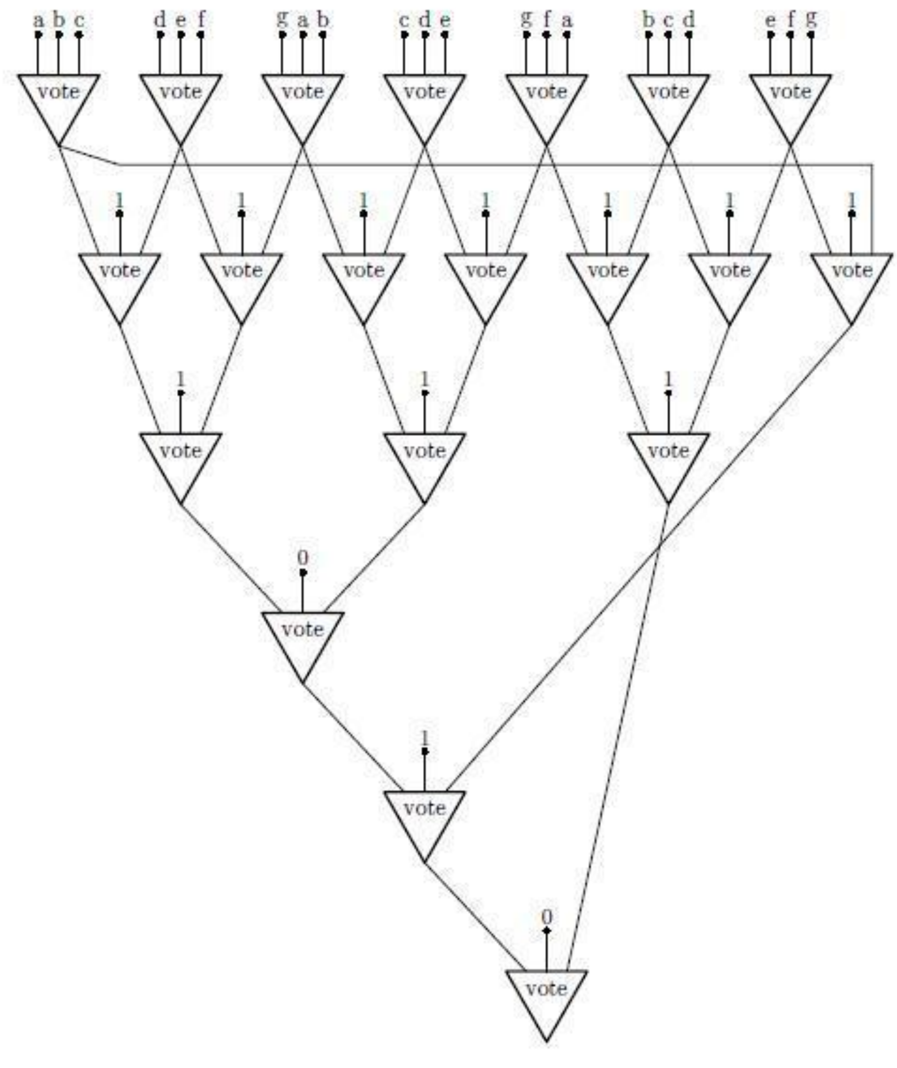


Схема 1

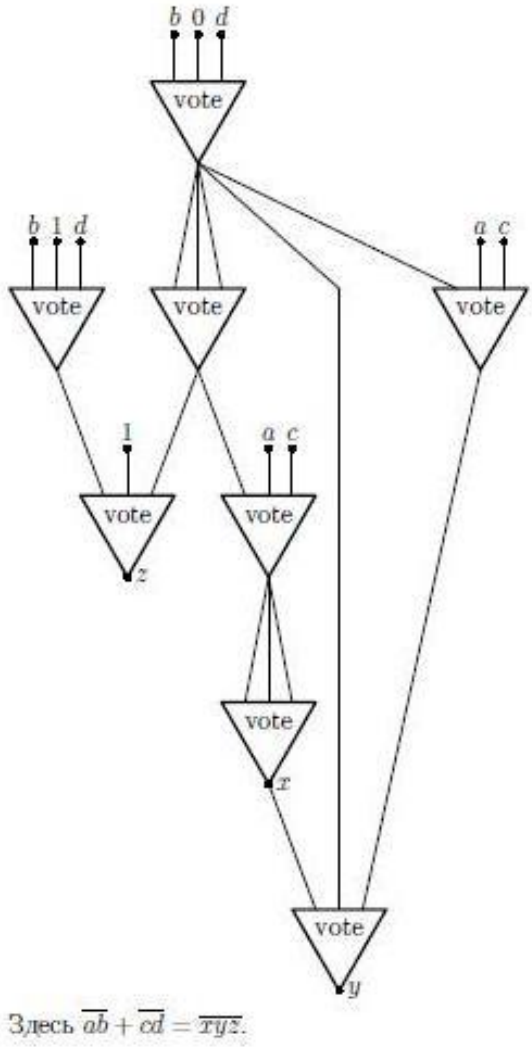


Схема 2

2. Аналогично предыдущему пункту, достаточно выразить сложение через ^, V и $^{-}$. Но цифры суммы $z_1z_2z_3$ чисел x_1x_2 и y_1y_2 равны: **(2)**

Разумеется, полученные таким образом схемы не минимальны.

Приведём наиболее оптимальные из схем, предложенных школьниками. Обе схемы предложены ученицей 8-го класса Астрелиной Анной Андреевной (см. схемы 1, 2)

Масса и проценты (2009, математика)

1. Заметим, что площадь элементарной площадки – паралеллограмма с вершинами в центрах 4 соседних шестиугольников – равна **(1)**. При этом внутри каждой элементарной площадки находятся два атома углерода. Следовательно, количество атомов углерода в трубке в два раза больше количества элементарных площадок, умещающихся на поверхности: **(2)**, что и требовалось доказать.

$$A_{gr} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \tag{1}$$

$$m_{CNT} = 2m_C\pi LD/A_{gr} = \frac{4\sqrt{3}}{9a^2}m_C\pi DL \tag{2}$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{m_{CNT1}}{m_{CNT2}}\frac{D_2}{D_1} = \frac{0{,}7}{1{,}2} \approx 0{,}58 \tag{3}$$

$$N_{CNT} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9a^2}(D_o + D_i)L \approx 7.92 \cdot 10^4 \tag{4}$$

$$m_{CNT} = N_{CNT} \cdot m_C \approx 9.50 \cdot 10^5 \text{а.е.м.} \approx 1.58 \cdot 10^{-21}\text{кг} \tag{5}$$

2. В условии задачи сказано, что $D_1 = 1{,}2D_2$ и $m_{CNT1} = 0{,}7m_{CNT2}$. В силу предыдущего пункта, масса нанотрубки прямо пропорциональна её длине и диаметру, откуда **(3)**, то есть длина первой нанотрубки на 100% − 58% = 42% меньше длины второй.
3. Найдём сначала число использованных атомов углерода (для этого достаточно в выведенной выше формуле считать $m_C = 1$). Оно равно **(4)**

   Следовательно, масса трубки равна **(5)**

Процент (2009, математика)

1.
$$3(LS\rho + m)g = \sigma S \quad (1)$$

$$S = \frac{3mg}{\sigma - 3L\rho g} \quad (2)$$

$$M = LS\rho = \frac{mg}{\dfrac{\sigma}{3L\rho} - g} \quad (3)$$

$$\frac{M_{steel}}{M_{nano}} = \frac{\dfrac{\sigma_{nano}}{3L\rho_{nano}} - g}{\dfrac{\sigma_{steel}}{3L\rho_{steel}} - g} \approx 556 \quad (4)$$

Если на тросе длины L, плотности ρ и площади поперечного сечения S висит лифт массы m, то сила натяжения нити в точке крепления равна (LSρ+m)g, что по условию должно быть в 3 раза меньше σS, где σ максимально допустимое напряжение (прочность троса). Получаем уравнение: **(1)**

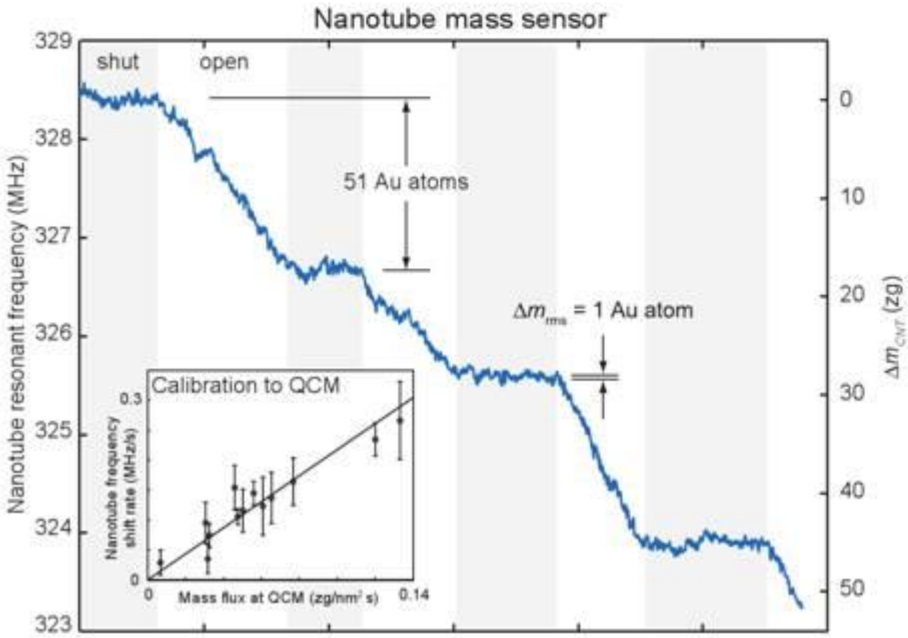
Откуда **(2)**

и масса троса равна **(3)**

то есть **(4)**

График (2009, математика)

1. Приведём оригинальный рисунок из статьи (см. рис.)



Серыми полосками отмечены участки времени, когда заслонка была закрыта. Их можно определить по тому, что кривая идёт почти горизонтально.

2. Для решения этого пункта надо измерить разброс значений функции в выбранных зонах, а масштаб отмечен справа. Разброс получается равным 3,27 цг. Следовательно, отклонение от среднего значения в два раза меньше, и составляет 1,63 цг.
3. Здесь надо измерить разность между значением поглощённой массы в начале эксперимента и в его конце. Она равна 52,8 цг. Так как масса атома золота составляет 0,327 цг, получим 161.5 атомов золота. Заметим, что так как точность прибора 1,63 цг, что соответствует 5 атомам золота, то этот ответ получен с точностью до 5 атомов.

Таблица (2009, математика)

1. Заметим, что константы T (∞) и C могут быть найдены по двум значениям T (r_1) и T (r_2). Действительно,**(1)**, откуда **(2)**

$$T(r_1) - T(r_2) = T(\infty)C\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \quad (1)$$

$$T(\infty)C = (T(r_1) - T(r_2))\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)^{-1} \quad (2)$$

$$T(\infty) = T(r) + \frac{T(\infty)C}{r} \approx 1337 \quad (3)$$

Таблица 1

r, нм	$T_{пл}$	$T(\infty)C$	r, нм	$T_{пл}$	$T(\infty)C$
1,5	540		20	1277	1200
2	739	1194	30	1297	1200
3	938	1194	40	1303	720
5	1093	1162	50	1313	2000
7	1166	1277	100	1325	1200
10	1217	1190	150	1329	1200
15	1257	1200			

Таблица 2

r, нм	$T_{пл}$	r, нм	$T_{пл}$
1,5	540	20	1277
2	739	30	1297
3	938	40	1307
5	1098	50	1313
7	1166	100	1325
10	1217	150	1329
15	1257		

Далее можно подставить полученное выражение в формулу для T (r_1) и найти T (∞), а затем и C, но мы этого делать не будем. Вместо этого для каждый двух соседних строк таблицы вычислим получающееся T (∞)C : *(см. табл. 1)*

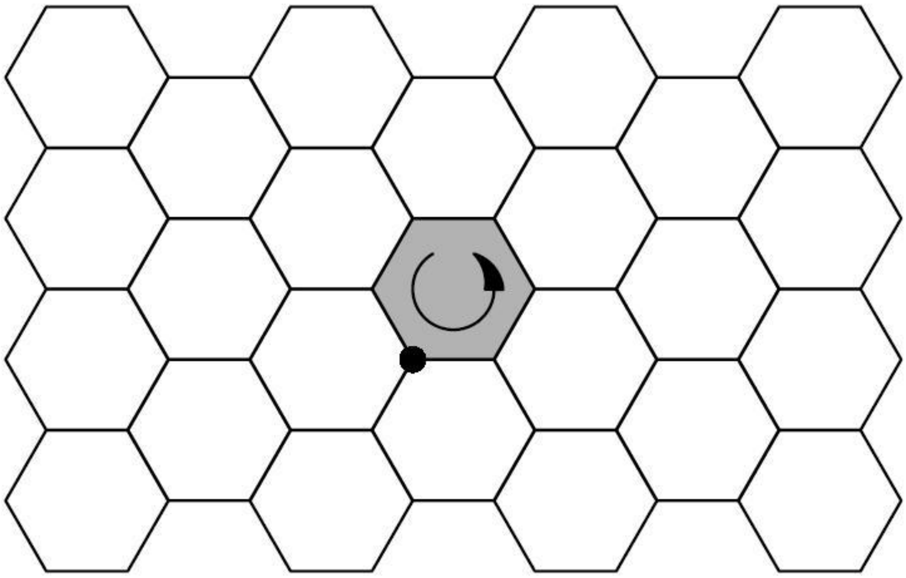
Из таблицы видно, что "опечатки" произошли для r = 5 и для r = 40. "Настоящее" значение T (∞)C найдём теперь по первой и последней строке, оно получится равным 1195,5 ≈ 1196.

Вычислим теперь T (∞): **(3)**

Восстановленная таблица имеет вид: *(см. табл. 2)*

Близорукий наноробот (2009, математика)

1. Заметим, что при каждом ходе мы узнаём, в какой полуплоскости относительно серединного перпендикуляра к шагу находится изотоп. Будем называть ход удачным, если он приближает нас к изотопу, и неудачным в противном случае.



Следующую лемму мы докажем в конце решения, а пока будем пользоваться без доказательства:

Лемма 1. Маршрут, состоящий только из удачных ходов, оптимальный.

Посмотрим на серый шестиугольник. Наша первая цель поставить робота в его вершину, ближайшую к изотопу. Для этого будем действовать так. Сначала робот обходит шестиугольник в направлении, указанном стрелкой, до первого неудачного хода, и затем делает еще один ход назад, откатывающий неудачный. Потом робот делает аналогичную операцию, начиная с другого направления*****. В результате робот придёт в нужную вершину, сделав не более 4 лишних ходов.

Теперь мы стоим в s угловой ї точке сектора в 60◦, в котором находится изотоп. Сделаем один шаг по биссектрисе этого угла, а второй перпендикулярно одной из сторон угла. На первом шаге мы заведомо приблизились к изотопу. Если на втором шаге мы тоже к нему приблизились, то эти два шага содержатся в одном из кратчайших путей к изотопу. Более того, мы снова оказались в s угловой ї точке сектора в 60◦, в котором находится изотоп. Если же на втором шаге мы удалились от изотопа, то изотоп находится в полоске, ограниченной серединным перпендикуляром ко второму ходу и стороной угла. После этого достаточно вернуться на один ход назад и идти вдоль этой полоски.

При таком алгоритме общее число s лишних ï ходов не превосходит 4 + 2 = 6.

Доказательство леммы: заметим, что если выбросить все рёбра, параллельные одному направлению, решётка распадётся на sзмейкиї. Рассмотрим змейки, на которых лежат начальная точка и изотоп. Нам нужно перейти с одной из них на другую. Следовательно, в направлении, параллельном выброшенным ребрам, необходимо сделать хотя бы столько ходов (по выброшенным рёбрам), каково расстояние между соответствующими змейками. Осталось заметить, что любой удачный ход, параллельный некоторому направлению, уменьшает число, соответствующее этому направлению: серединный перпендикуляр как раз отделяет одни змейки от других.

***** *Идти только в одну сторону может оказаться недостаточно, если первый же ход неудачный.*

Геометрия фуллеренов (2009, математика)

1. Сумма углов произвольного n-угольника равна 1800 (n-2). Поскольку все углы правильного n-угольника равны, то alpha = 1800 (n-2) / n. Рассчитаем углы для разных n:

n=4, alpha = 900,

n=5, alpha = 1080,

n=6, alpha = 1200,

n=7, alpha ~ 128.570,

В шестиугольнике величина угла равна 120°, что точно соответствует углу между C–C связями. Образование четырехугольника не выгодно, так как отклонение угла от 120° наибольшее. Образование семиугольника не выгодно, так как угол больше 120° и он не может быть вписан в структуру, состоящую из шестиугольников. Поэтому единственным дополнением к шестиугольникам будет пятиугольник.

2. Соотношение Эйлера для выпуклого многогранника имеет вид:

$$В+Г = Р + 2,$$

где В, Р и Г – количества вершин, ребер и граней соответственно. Пусть в произвольной замкнутой нанотрубке N пятиугольников и M шестиугольников. Тогда: Г = N+M,

В = (5N+6M)/3, деление на 3 возникает, т.к. каждая вершина принадлежит 3 граням.

Н = (5N+6M)/2, деление на 2 возникает, т.к. каждое ребро принадлежит 2 граням.

НайдемN:

$(5N+6M)/3 + (N+M) = (5N+6M)/2 + 2$

$5N/3 + 2M + N + M = 5N/2 + 3M + 2$

$8N/3 = 5N/2 + 2$

$N/6 = 2$

$N = 12$

Тем самым мы доказали, что в произвольной замкнутой нанотрубке 12 пятиугольников.

3. 12 пятиугольников

4. В = (5N+6M)/3 = 60 (N=12)

$(60+6M)/3 = 60$

$60 + 6M = 180$

$6M = 120$

$M = 20$

Рассчитаем число атомов во втором члене ряда:

$B = (5N+6M)/3$ $(N=12)$, $M = 20 + 5 = 25$, $B = (5*12+6*25)/3 = 70$

Для последующих членов ряда число атомов также возрастает на 10, следовательно, общая формула имеет вид: $B = 60 + 10n$

Геометрия нанотрубок (2009, математика)

1. Посмотрим на рисунок 1. Модуль вектора {(0;0) (m,n)} – это длина окружности, лежащей в основании цилиндрической одностенной нанотрубки хиральности m;n. Рассмотрим рисунок 3.

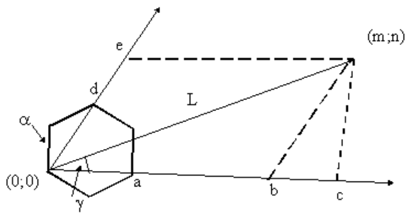


Рис. 3

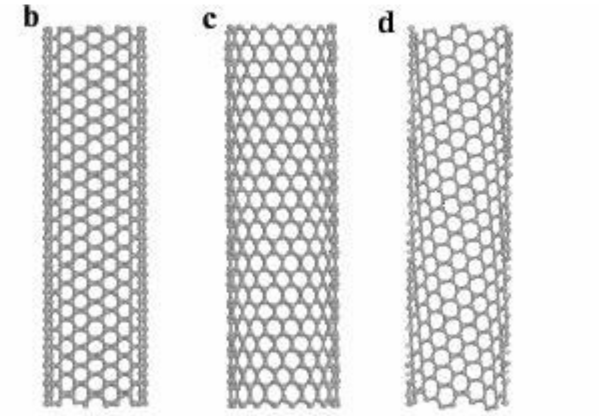


Рис.4

Таблица 1

m	n	D
6	6	0.814013
10	10	1.356688
12	0	0.939941
9	3	0.847251
10	2	0.872228
11	7	1.231028
4	3	0.476453
11	5	1.110497
5	1	0.436114
12	4	1.129668

Отрезок (0;0)d равен отрезку (0;0)a. Это - модули единичных векторов x и y. **(1)**.

Вектор {(0;0)(m;n)} равен сумме векторов mx и ny, поэтому **(2)**

Угол (mn)bc = 600 , Угол c(mn)b = 300, отрезок bc равен половине b(m;n). Следовательно, **(3)**

Диаметр нанотрубки равен **(4)**

Некоторые участники Олимпиады использовали для доказательства теорему косинусов, другие – формулу для скалярного произведения векторов. И то, и другое – верно.

2. Диаметры трубок приведены в таблице 1

   Отношение максимального диаметра к минимальному равно 3,11.

3. Получаем (см. рисунки 1 и 3) **(5)**

   Видим, что трубки с разной хиральностью могут иметь одинаковый угол скручивания. Для того, чтобы у двух трубок угол y был одинаков, необходимо и достаточно, чтобы отношения n/m у этих трубок были равны. Так, все трубки с m = n имеют угол скручивания, равный 30 градусам. Другие правильные выражения для y:**(6)**

   Трубка с y= 38^{o}, D = 1.3 нм имеет хиральность n = 12, m = 7.**(7), (8)**

4. Если m = n, то трубки принадлежат к семейству n/m=1. Тогда **(9)**

   Расстояние между стенками трубок в матрешке для семейства n/m=1 равно **(10).**

   Неравенство **(11)** выполняется при $(n_m - n_k) = 5$. Можно утверждать, что трубки с n/m=1 способны образовывать матрёшку. Например, внешняя трубка может иметь хиральность (8;8), а внутренняя – (3;3).

5. Согласно ИЮПАК, хиральным называется объект, который не может быть совмещен со своим зеркальным отражением (типичный пример - наши левая и правые руки!). Примером хирального объекта может служить молекула CHFClBr. Если объект может быть совмещен со своим зеркальным изображением, он называется ахиральным.

ИЮПАК дает несколько определений прохирального объекта. Вот, одно из них. Прохиральным называется объект (молекула), который может быть превращен в хиральный объект путем добавления нового атома или ахиральной группы. В качестве примера приводится молекула кетона $CH_3CH_2COCH_3$, которая может быть превращена в хиральную молекулу спирта $CH_3CH_2CH(OH)CH_3$ путём добавления атомов H. Энантиомерами ИЮПАК называет две молекулы, которые являются зеркальными отражениями друг друга. Для нанотрубок понятие хиральность требует некоторых пояснений. Существует три типа одностенных углеродных НТ:

а) Трубки (m;0),(0,n). Их называют трубками типа «зигзаг».

б) Трубки (m;n), где m = n. Их называют трубками типа «кресло».

в) Наконец, трубки (m;n), где m><n, m><0

Трубки «зигзаг» и «кресло» ахиральны. Они явно симметричны. Действительно хиральными объектами являются только трубки типа (в). Так их и принято называть в литературе. На рисунке 4 (b) – «кресло», (c) – «зигзаг», а (d) – настоящая, хиральная нанотрубка. Среди хиральных трубок есть энантиомеры! Это трубки с (m;n) и (n;m). Они имеют одинаковый диаметр, углы свертки y и 60–y. Энантомер превращает-ся в энантиомер выворачиванием трубки наизнанку. (1D инверсия вдоль оси трубки). Можно себе представить операцию скручивания, приводящую к получению *I* и *II* . Скручивание происходит вдоль одного и того же вектора *лицом вверх* или *изнанкой вверх*.

Рост дендримеров (2009, математика)

1. В первом слое один мономер, связанный с тремя мономерами второго слоя. Начиная со второго слоя все мономеры образуют одну связь с молекулой предыдущего слоя и две связи – с молекулами последующего. Т.е. в каждом последующем слое число мономеров возрастает в два раза по сравнению с предыдущим. Тогда общее число мономеров будет равно **(1).**

$$n = 1 + 3 + 3\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \ldots + 3\cdot 2^{N-1} = 1 + 3\sum_{k=0}^{N-1} 2^k =$$

$$= 1 + 3\cdot\frac{2^N - 1}{2-1} = 1 + 3\left(2^N - 1\right) = 3\cdot 2^N - 2 \qquad \mathbf{1}$$

2. Максимальным радиусом дендримера будет расстояние, показанное на рисунке 3 красной линией, так как расстояние между мономерами, связанными через один, фиксировано и равно **(2)**, при этом такие отрезки будут давать максимальный радиус, когда будут лежать на одной прямой. Тогда максимальный радиус будет равен **(3)**.

$$R_2 = \sqrt{r^2 + r^2 - 2\cdot r\cdot r\cdot\cos 120^0} = \sqrt{r^2 + r^2 + r^2} = r\sqrt{3}, \qquad \mathbf{2}$$

$R_{2N} = N\cdot r\sqrt{3}$ для четного числа слоев;¶

$R_{2N+1} = \sqrt{r^2 + R_{2N}^2 + r\cdot R_{2N}\cdot\cos 120^0} = \sqrt{r^2 + 3N^2r^2 + r^2\frac{N\sqrt{3}}{2}} = r\sqrt{3N^2 + \frac{N\sqrt{3}}{2} + 1}$ – для нечетного.¶

3

Далее для удобства примем $R_N = r\cdot\frac{N\sqrt{3}}{2}$ ¶

$$3\cdot 2^{N_c-1} \qquad \mathbf{4}$$

$$3\cdot S\cdot 2^{N_c-2} \qquad \mathbf{5}$$

$$4\pi R_{Nc}^2 \qquad \mathbf{6}$$

$$3\cdot S\cdot 2^{N_c-1} = 4\pi R_{Nc}^2 \qquad \mathbf{7}$$

$$3 \cdot S \cdot 2^{N_c - 1} = 4\pi r^2 \cdot \frac{3N_c^2}{4}$$

$$S \cdot 2^{N_c - 1} = \pi r^2 \cdot N_c^2 \qquad \mathbf{8}$$

$$n_I = 3 \cdot 2^{N_c} - 2 \text{¶} \qquad \mathbf{9}$$

$$n_{II} = \sum_{k=N_c+1}^{N} \frac{4\pi R_k^2}{S} = \sum_{k=N_c+1}^{N} \frac{4\pi r^2}{S} \cdot \frac{3N_c^2}{4} = \frac{3\pi r^2}{S} \sum_{k=N_c+1}^{N} k^2 = \frac{3\pi r^2}{S} \sum_{k=N_c+1}^{N} k^2 \text{¶}$$

$$n_{II} = \left[\frac{3\pi r^2}{S}\right] \sum_{k=N_c+1}^{N} k^2 \text{,¶} \qquad \mathbf{10}$$

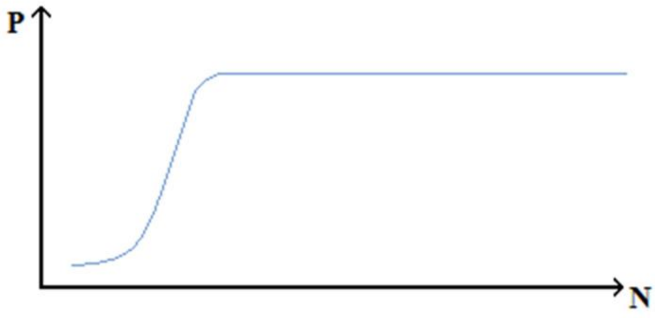
Найдем· $\sum_{k=N_c+1}^{N} N_c^2$:¶ **11**

$$\sum_{k=N_c+1}^{N} N_c^2 = \sum_{k=1}^{N} k^2 - \sum_{k=1}^{N_c} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{N_c(N_c+1)(2N_c+1)}{6} \text{¶}$$

Тогда¶

$$n_{0-Nc} = 3 \cdot 2^{N_c} - 2 + \left[\frac{3\pi r^2}{S}\right]\left(\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{N_c(N_c+1)(2N_c+1)}{6}\right) \text{¶}$$

3. В слое с номером N_c число мономеров равно **(4)**, а занимаемая ими площадь – **(5)**. Площадь сферы с радиусом R_{Nc} равна **(6)**. Тогда решая уравнение **(7)**, можно найти N_c . Это уравнение можно также переписать в виде **(8)**.
4. В дендримере с $N > N_c$ число мономеровможно представить как сумму двух слагаемых, одно из которых соответствует слоям до N_c, а другое после **(9)**. Или, учитывая, что число мономеров целое **(10)**, где квадратные скобки обозначают целую часть. Затем **(11)**.
5. Плотность дендримера будет быстро возрастать до достижения N_c, затем медленно выходит на предельное значение, которое соответствует плотной упаковке мономеров **(12)**.



12 ¶

Дырявое покрытие (2010, школьники, математика)

Рассмотрим лежащий на поверхности равносторонний треугольник со стороной R. Хотя бы две его вершины имеют один и тот же цвет.

Остаётся заметить, что равносторонний треугольник лежащий на поверхности шара будет иметь большую сторону, если он находится на диаметральной сечении. По теореме синусов сторона такого треугольника равна $R = 2r \sin 60^o = \sqrt{3}r$.

Успех без списывания (2010, школьники, математика)

Доказательство. Считаем, что участник A слабее участника B, если B сделал все задачи, сделанные A. Таким образом мы можем сравнивать некоторых участников олимпиады. Любую совокупность упорядоченных участников назовём цепью. Максимальная цепь имеет длину 5 и всего есть 5! максимальных цепей, образованных различными перестановками номеров решённых задач. Если зафиксировать множество из k номеров, то существует $k!(5-k)!$ цепей, содержащих это множество. Рассмотрим теперь несравнимые множества решённых задач и обозначим R наибольший размер такого множества. Тогда

$$\sum_{k=1}^{R} k!(5-k)! \leqslant 5!.$$

Поэтому

$$1 \geqslant \sum_{k=1}^{R} \frac{k!(5-k)!}{5!} \geqslant R \cdot \min\left\{\frac{k!(5-k)!}{5!}\right\} = \frac{R}{\max\left\{\dfrac{5!}{k!(5-k)!}\right\}}.$$

откуда следует, что R меньше, или равно максимальной из этих величин

$$R \leqslant \max\left\{\frac{5!}{k!(5-k)!}\right\} = \frac{5!}{3!2!} = 10.$$

Поскольку число участников равно 11, среди них есть хотя бы двое, один из которых слабее другого.

Шарада (2010, школьники, математика)

Решение. Очевидно, что О+А=А означает, что О=0(цифре 0). Далее имеем

$$\text{Н} + \text{Л} = \text{Ч}$$

(Н+Л=Ч+10 невозможно, иначе получим 0+А+1=А+10) и тогда

$$\text{Н} + \text{К} = \text{Д} + 10.$$

Вычитая из второго уравнения первое получаем $\text{К} - \text{Л} = \text{Д} - \text{Ч} + 10$, поэтому К>Л, Ч>Д, Н<Ч, Л<Ч. Таким образом, буква Ч, будучи больше 0 и других трёх разных цифр, равна, как минимум, 4. С другой стороны, если она не меньше 5, то прогрессия Ч, А, Ш, У обязательно содержит число 8, то есть куб целого числа. Поэтому есть только одна возможность: Ч=4, А=5, Ш=6, У=7.

Тогда Н+Л=4, Н+К=Д+10. Так как Н и Л различные, одно из них рано 1, другое 3. Н не может быть равно 1, так как иначе 1+К=Д+10, К=Д+9, что невозможно при Д>0. Значит, Н=3, Л=1. Тогда 3+К=Д+10, К=Д+7. Д не равно ни нулю, ни 1. Поэтому Д=2, а К=9. Итак: 3530+69015=72545.

Запутанная наноэлектроника (2010, школьники, математика)

Решение.

Отождествим устройства с точками на плоскости и обозначим их A_1, $A_2, \ldots, A_{2n+1}$, а нанопроводы — с отрезками, соединяющими соответствующие точки. Пусть, для определенности, точки A_1 и A_2 соединены отрезком. Тогда, по условию задачи, найдется единственная точка (пусть, для определенности, это будет точка A_3), которая соединена с точками A_1 и A_2 отрезками. Следовательно, эти точки образуют треугольник. Рассуждая аналогично, получим, что все 2n+1 точки являются вершинами треугольников, причем, любые два треугольника имеют общую вершину.

Покажем, что существует точка, общая для всех треугольников. Применим метод математической индукции по числу n. При $n = 1$ утверждение верно. Пусть для некоторого значения $n > 1$ существует единственная вершина A_1, общая для всех треугольников. Добавим точки A_{2n+2}, A_{2n+3}. Они образуют треугольник с одной из точек A_1, $A_2, \ldots, A_{2n+1}$. Если эта точка отлична от A_1 (например, это A_2), то для точек A_4 и A_{2n+2} не существует точки, соединенной с этими точками отрезками, что противоречит условию задачи. Геометрически это можно изобразить так:

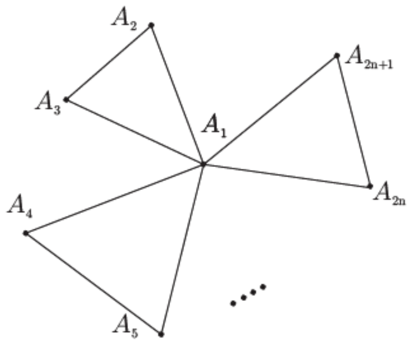


Рис. 1:

Из рисунка 1 видно, что число сторон треугольников равно $3n$. Из условия задачи следует равенство $3n = 90$, откуда находим $n = 30$.

Ответ. $n = 30$.

Конференционная жизнь (2010, школьники, математика)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x число всех участников. В субботу прибыло

$$\frac{24}{100}x = \frac{6}{25}x$$

участников. В воскресенье прибыло $\frac{2}{3}x$ участников. Откуда следует, что x делится на 25 и на 3. В понедельник прибыли

$$\left(1 - \frac{2}{3} - \frac{6}{25}\right)x = \frac{7x}{75}$$

участников. Следовательно $25 < 7x/75 \leqslant 29$. Остаётся заметить, что $7x/75$ делится на 7, т.е. $7x/75 = 28$, $x = 300$. В субботу прибыло

$$\frac{6}{25} \cdot 300 = 72$$

участников.

Ответ. 72.

Гексагональная молекула (2010, школьники, математика)

Нет. Заметим, что в каждую вершину входит не менее трёх ребер и все плоские углы шестиугольников равны 120°. Возьмем любую вершину, и спроецируем на любую грань при вершине. Тогда углы при проекции только увеличатся. Поскольку в вершину входит не менее 3 ребер, что сумма углов более 360° – противоречие.

Манипуляция атомами (2010, школьники, математика)

Решение. Перепишем формулу, заданную в условии, в следующем виде:

$$a_{n+3} = 3(a_{n+2} - a_{n+1}) + a_n + 8 \cdot 3^n. \tag{1}$$

Найдём ещё несколько членов последовательности a_n

$$a_4 = 84 = 3^4 + 3 = 3^4 + 2^2 - 1,$$
$$a_5 = 251 = 3^5 + 8 = 3^5 + 3^2 - 1,$$
$$a_6 = 744 = 3^6 + 15 = 3^6 + 4^2 - 1.$$

Из этих формул легко прийти к гипотезе:

$$a_n = 3^n + (n-2)^2 - 1. \tag{2}$$

Докажем эту гипотезу по индукции:

1) Легко убедиться, что для $n = 1, 2, 3$ наша гипотеза справедлива. 2) Предположим, что гипотеза (2) справедлива для любого натурального $k \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$. 3) Докажем, что гипотеза (2) справедлива для номера $n+1$. Согласно предположению индукции, имеем:

$$a_n = 3^n + (n-2)^2 - 1,$$
$$a_{n-1} = 3^{n-1} + (n-3)^2 - 1,$$
$$a_{n-2} = 3^{n-2} + (n-4)^2 - 1.$$

Подставим это выражение в формулу (1):

$$a_{n+1} = 3(a_n - a_{n-1}) + a_{n-2} + 8 \cdot 3^n = 3^{n+1} + (n-1)^2 - 1.$$

Таким образом, методом математической индукции доказано равенство (2).

Остаётся найти требуемую сумму

$$\sum_{n=1}^{2010} a_n = \sum_{n=1}^{2010} (3^n + (n-2)^2 - 1) = \sum_{n=1}^{2010} 3^n + \sum_{n=1}^{2010} (n-2)^2 - \sum_{n=1}^{2010} 1 =$$
$$= (3/2)(3^{2010} - 1) + 1 + \sum_{n=3}^{2010} (n-2)^2 - 2010 = 3^{2011}/2 - 1/2 - 2010 + \sum_{n=1}^{2008} n^2 =$$
$$= (3^{2011} - 1)/2 - 2010 + 2008 \cdot (2008 + 1) \cdot (2 \cdot 2008 + 1)/6 = (3^{2011} - 1)/2 + 2700809194.$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6},$$

которое легко доказывается по индукции.

Ответ. $(3^{2011} - 1)/2 + 2700809194$.

Замечание 1. *Можно было бы прийти к формуле (2) и доказать её иначе. Можно заметить, что при подстановке любого полинома $b_n = an^2 + bn + c$ вместо a_n выполнено тождество*

$$b_{n+1} = 3(b_n - b_{n-1}) + b_{n-2}.$$

Следовательно, с учётом левой части равенства (1), разумно искать решение в виде $a_n = an^2 + bn + c + d3^n$. Коэффициеты a, b, c, d находим, подставив выражение $a_n = an^2 + bn + c + d \cdot 3^n$ в первые четыре равенства $a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $a_3 = 27$, $a_4 = 84$.

Замечание 2. *Согласно гипотезе Дирака, общее число атомов во Вселенной — величина порядка 10^{80}. Так что наноманипулятор не сможет долго продолжать свою работу, использую такое количество молекул, как написано в условиии задачи.*

Наноробот - лентяй (2010, школьники, математика)

Решение. Будем предролагать, что наноробот побывал сначало на грани ABC в точке E, потом — на грани BCD в точке F, затем — на грани DAB в точке G, и, наконец, на грани ACD в точке H, а затем вернулся в начальную точку.

Утверждение 1. *Пусть $KLMN$ четырёугольник в пространстве, P, Q — середины сторон KL, MN. Тогда справедливо $PQ \leqslant \frac{1}{2}(KN + LM)$.*

Доказательство. Пусть R середина диагонали LN. Тогда $PR = KN/2$, $RQ = LM/2$. Откуда $PQ \leqslant PR + RQ = (KN + LM)/2$.

Проведём через DC плоскость, перпендикулярно AB (это плоскость — плоскость симметрии для тетраэдра $ABCD$) и рассмотрим четырёхугольник $E_1F_1G_1H_1$, симметричный $EFGH$ относительно этой плоскости. Вершины E_1 и G_1 останутся на тех же гранях, что E и G соответсвенно, F_1 попадёт на одну грань с H, а H_1 — на одну грань с F. Периметры четырёхугольников $EFGH$ и $E_1F_1G_1H_1$ равны. Обозначим через E_2, F_2, G_2 и H_2 середины отрезков EE_1, FH_1, GG_1 и HF_1 соответственно. Вершины этого четырёхугольника тоже лежат награнях тетераэдра, и, согласно утверждению, периметр четырёхугольника $E_2F_2G_2H_2$ не больше периметра $EFGH$. Кроме того, вершины E_2, G_2 будут лежать на медианах граней ABC и ABD, выходящих из точек C и D соответственно.

Исходя из четырёхугольника $E_2F_2G_2H_2$, точно так же построим $E_3F_3G_3H_3$, симметричный ему относительно плоскости симметрии тетраэдра, проходящей через AB, а затем, взяв середины отрезков, соединяющих вершины этих четырёхугольников, лежащих в одной грани получим $E_4F_4G_4H_4$, все вершины корого лежат в объединении двух плоскостей симметрии тетраэдра $ABCD$, проходящих через CD и DT. Таким образом вершины E_4, G_4 лежат на медианах CT и DT граней ABC и ABD, а вершины F_4 и G_4 — на мединах AS и BS граней ACD и BCD.

При этом периметр $E_4F_4G_4H_4$ не превосходит периметер $EFGH$. Значит периметр $EFGH$ больше либо равен $4d$, где d — расстояние между медианами CT и BS.

Далее ищем стандартным образом расстояние между скрещивающимися прямыми CT и BS. Итого

$$P_{EFGH} = 4 \cdot d = 4 \cdot \frac{0.14}{\sqrt{10}} = \frac{0.56}{\sqrt{10}}.$$

Ответ. $0.56/\sqrt{10}$ нм.

Замечание 1. *Некоторые участники предлагали выбрать путь из вершины (наноробот побывает на трёх гранях) по перпендикуляру на плоскость основания и обратно. Выше показано, что этот путь не оптимален, что легко проверить простым вычислением:*

$$2H = 2 \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2 \cdot 0.14 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} > 4 \cdot \frac{0.14}{\sqrt{10}}.$$

Водородная мечта (2010, школьники, математика)

Решение. Используя определение потенциала Леннарда -Джонса 12-6, запишем неравенство из задачи в следующем виде

$$4\omega\left(\sum_{k=1}^{12}\left(\left(\frac{k\sigma}{r}\right)^{12}-\left(\frac{k\sigma}{r}\right)^{6}\right)\right)<4\omega\left(\left(\frac{13\sigma}{r}\right)^{12}-\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\frac{12^7}{7}\right).$$

При $\omega=0$ неравенство решений не имеет, при $\omega>0$ сократим на константу 4ω и сгруппируем слагаемые:

$$\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12}\left(13^{12}-\sum_{k=1}^{12}k^{12}\right)+\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\left(\sum_{k=1}^{12}k^{6}-\frac{12^7}{7}\right)>0.$$

Введем обозначения

$$A=13^{12}-\sum_{k=1}^{12}k^{12},\quad B=\sum_{k=1}^{12}k^{6}-\frac{12^7}{7}.$$

При $\sigma=0$ неравенство решений не имеет, при $\sigma>0$ сократим на положительную константу $\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}$. Докажем, что $A>0$, $B>0$. Тогда отсюда будет вытекать справедливость исходного неравенства для любых положительных значений ω и σ.

Из бинома легко вытекает оценка: $(1+n)^{12}>n^{12}+12n$, $n\in\mathbb{N}$. Продолжим

$$13^{12}=(1+12)^{12}>12^{12}+12\cdot 12^{12}=12^{12}+(1+11)^{12}>12^{12}+11^{12}+12\cdot 11^{11}>$$
$$>12^{12}+11^{12}+(1+10)^{12}>\cdots>12^{12}+11^{12}+\cdots+2^{12}+1^{12}.$$

Таким образом, доказано, что $B>0$. Покажем, что $A>0$. Точнее, докажем $10^6+11^6+12^6>\frac{12^7}{6}$, что равносильно $10^6+11^6>\frac{5\cdot 12^6}{6}$. Использую неравенство $a^2+b^2\geqslant 2ab$ имеем $10^6+11^6\geqslant 2\cdot 110^3$. Достаточно доказать неравенство $2\cdot 110^3\geqslant \frac{5}{7}\cdot 12^6$ или $7\cdot 11^3\cdot 5^2\geqslant 3^6\cdot 2^8$. Данное неравенство справедливо, т.к.

$$7\cdot 11^3\cdot 5^2=232925>186624=3^6\cdot 2^8.$$

Ответ. Верно при всех положительных значениях параметров.

Замечание 1. *На самом деле справедливо асимптотическое равенство*

$$\sum_{k=1}^{n}k^{\alpha}\sim\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1},\quad \alpha>0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Углеродные мячики (2010, школьники, математика)

1. Пусть подобный фуллерен построен и содержит n шестиугольных граней, **Г=** n.

Тогда $$\frac{6}{3}n - \frac{6}{2}n + n = 2$$

Очевидно, что не существует n, при котором данное равенство выполняется. Следовательно, такого многогранника не существует.

2. Обозначим количество пятиугольных и шестиугольных граней, соответственно, $Г_5$ и $Г_6$.

Тогда $Г = Г_5 + Г_6$

Согласно теореме Эйлера: $\{5*Г_5 + 6*Г_6\}/3 - \{5*Г_5 + 6*Г_6\}/2 + 5*Г_5 + 6*Г_6 = 2$

$Г_5 /6 = 2$, $Г_5 = 12$

3. Число атомов определяется формулой

$n = \{5*12 + 6*Г_6\}/3 = 20 + 2*Г_6$.

Очевидно, что n – чётно, как при чётных, так и при нечётных $Г_6$.

4. Количество пятиугольников равно 12 (см. вопрос (2)). Фуллерен с минимальным числом атомов состоит только из пятиугольников. Тогда он содержит 5*12/3 = 20 атомов углерода. Это C_{20}.

Если пятиугольники изолированы, то у них 12*5 = 60 общих сторон с шестиугольниками. Каждый шестиугольник может граничить с тремя разделенными пятиугольниками. Таким образом, у нас минимально 60/3 = 20 шестиугольников. Общее количество атомов углерода в таком фуллерене {12*5+6*20}/3 =60.

Речь идет о Бакминстерфуллерене, C_{60}.

5. Это фуллерен C_{26}. Он имеет только пятиугольные и шестиугольные грани. В=26, $Г_5$ = 12 и $Г_6$=2. Две шестиугольных грани не граничат друг с другом.

Изомеры (2010, школьники, математика, повышенной сложности)

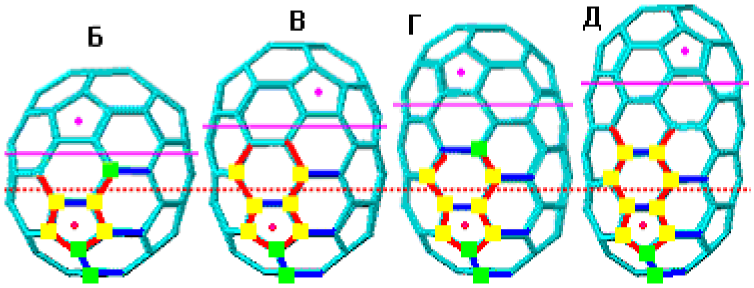


Иллюстрация к ответу

Неэквивалентные вершины – зеленые и желтые (последние определяют пары зеркальных изомеров по горизонтали), и неэквивалентные ребра – синие и красные (последние определяют пары зеркальных изомеров по горизонтали).

Число изомеров того или иного фуллерена определяется числом неэквивалентных позиций, которые может занять вводимая метка в структуре молекулы данного фуллерена. Если вводится единичная метка, то мы рассматриваем количество неэквивалентных вершин представленных многогранников, если отмечаются два соседних атома углерода, то необходимо рассмотрение неэквивалентные ребра данных многогранников.

Рассмотрим с этой точки зрения предложенный в условии гомологический ряд. На нижней торцевой пятиугольной грани все вершины и ребра эквивалентны (переходят друг в друга при повороте фуллерена вокруг оси). От этих пяти одинаковых вершин отходят 5 эквивалентных ребер, на окончании которых также лежат эквивалентные вершины. Далее, напротив этих пяти вершин, горизонтально расположены еще пять эквивалентных между собой ребер. Кроме того, эквивалентными между собой будут *любые* пять ребер, лежащих в одной горизонтальной плоскости.

Теперь рассмотрим пятиугольник, отмеченный на рисунке красной точкой. Его «правая» и «левая» стороны не могут быть совмещены ни при каких поворотах молекулы фуллерена, но зато отлично совмещаются, если отразить молекулу в зеркале. Изомеры, содержащие такие метки, являются зеркальными. Далее, как можно видеть из рисунка, все вершины и негоризонтальные ребра, лежащие выше этого пятиугольника и до «середины» молекулы, повторяют эти свойства. Если ребро попадает на центральную (горизонтальную) плоскость молекулы (**n** нечетное), то лежащие при нем вершины эквивалентны (совмещаются поворотом молекулы в плоскости листа).

1. Как упоминалось ранее, если отметить один из атомов углерода, количество изомеров определяется числом неэквивалентных вершин многогранника.

А – 1 изомер (все вершины одинаковы).

Количество изомеров произвольного гомолога фуллерена **А** складывается из одинакового для всех числа изомеров, отвечающих атомам «полусферы», и числа изомеров, определяемых атомами «вставки».

Для «полусферы» существует **6** изомеров, из которых **4** представляют собой **2** зеркальные пары.

Таблица.

Количество изомеров, если отмечен один из атомов углерода

Фуллерен	**n**	**Изомеры «вставки»**	**Всего**	**Число зеркальных пар**
Б	1	1	7	2
В	2	1*2(зерк.)	8	3
Г	3	1*2(зерк.) +1	9	3
Д	4	1*2(зерк.) +1*2(зерк.)	10	4
Х	n	…	n+6	(**n** div 2) + 2

где div – целая часть от деления

2. Как упоминалось ранее, если отмечаются два соседних атома углерода, количество изомеров определяется числом неэквивалентных ребер многогранника.

А – 2 изомера (ребра, лежащие на границах пятиугольников с шестиугольниками и шестиугольников с шестиугольниками).

Количество изомеров произвольного гомолога складывается из одинакового для всех числа изомеров, отвечающих атомам «полусферы», и числа изомеров, определяемых атомами «вставки».

Для «полусферы» существует **10** изомеров, из которых **6** представляют собой **3** зеркальные пары.

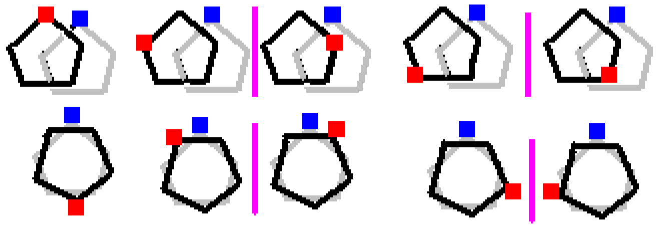
Таблица.

Количество изомеров, если отмечаются два соседних атома углерода.

Фуллерен	**n**	**Изомеры «вставки»**	**Всего**	**Число зеркальных пар**
Б	1	1	11	3
В	2	1+1*2(зерк.)	13	4
Г	3	1+1*2(зерк.)+1	14	4
Д	4	1+1*2(зерк.)+1+1*2(зерк.)	16	5
Х	n	…	10+((n+1)div2) + 2*(n div 2)	3+(n div 2)

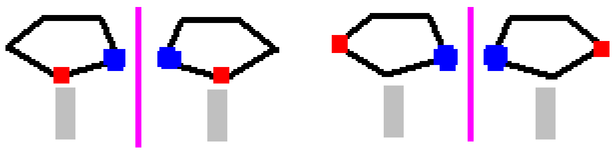
где div – целая часть от деления

3. Торцевые пятиугольники фуллеренов образуют в пространстве пятиугольную призму, если **n** нечетное, и пентагональную антипризму, если четное (см. рис 1 из условия, верхний ряд изображений). Поэтому количество изомеров фуллеренов будет равно количеству «изомеров» аналогично замещенных призмы и антипризмы, соответственно.



Каждый из типов фуллеренов имеет по 5 изомеров, из них 2 пары зеркальных.

4. В данном случае число изомеров перечисленных фуллеренов и углеродной нанотрубки будет равно числу изомеров аналогично «помеченного» пятиугольника, находящегося на конце стержня, поскольку торцевые пятичленные циклы данных фуллеренов равнозначны.



Для всех представителей гомологического ряда существует по 2 пары оптических изомеров.

Занимательная стереометрия – от Платоновых тел к фуллеренам и нанотрубкам (2010, школьники, математика, повышенной сложности)

1. Многогранник **M** – икосаэдр.

Количество вершин усеченной фигуры = число ребер икосаэдра*2 = число вершин икосаэдра*5 = 60. Таким образом, формула **A** – $\mathbf{C}_{60}$.

Количество пятиугольников совпадает с количеством вершин икосаэдра: **12**.

Количество шестиугольников совпадает с количеством граней икосаэдра: **20**.

Всего граней **32**.

Количество ребер **A** по сравнению с **M** увеличилось на количество ребер в образовавшихся при срезании всех вершин икосаэдра пятиугольниках: 30+12*5=**90**.

2. В образовании каждой связи участвуют по два атома. Значит, σ-связей в фуллерене 60*3/2 = **90** (столько же, сколько ребер), π-связей в 3 раза меньше, то есть **30**.
3. Радиус описанной вокруг фуллерена **A** сферы равен **OY** – расстоянию от центра фуллерена до атома углерода в вершине усеченного икосаэдра.

Сначала рассмотрим три перпендикулярных прямоугольника, опирающихся на ребра икосаэдра, как приведено на рис. 2. условия задачи. Эти прямоугольники равны, поскольку их меньшие стороны являются ребрами икосаэдра, а бóльшие стороны являются диагоналями равных правильных пятиугольников, образованных ребрами икосаэдра. Следовательно, перпендикуляр **OX** опущенный из центра **O** на середину грани икосаэдра **BG** равен половине **AC** (бóльшей стороны прямоугольника и, одновременно, диагонали пятиугольника **ABCDE)**.

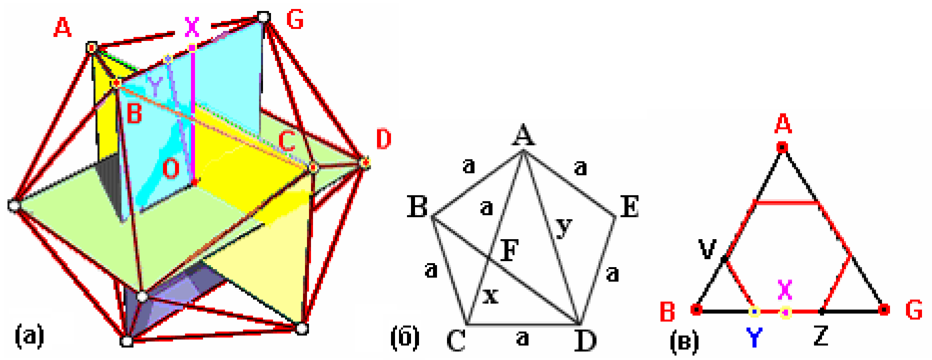


Рисунок – иллюстрация к ответу.

Найдем длину **AC**, для этого рассмотрим пятиугольник**ABCDE**, образованный ребрами икосаэдра.

Сумма углов пятиугольника равна 180°(5-2). Угол при вершине пятиугольника 180°*3/5 = 108°. Тогда, по теореме косинусов для треугольника **ABC**, диагональ **AC** пятиугольника **ABCDE** равна

$$a*(2-2cos(108°))^{½} = a*2*cos(\pi/5) = a*\varphi$$

где a – длина стороны икосаэдра, φ - численный коэффициент (≈ 1.618), широко известный как «золотое сечение».

Также, диагональ **AD** пятиугольника **ABCDE** можно найти из подобия треугольников **CBF** и **DAF** x/a = a/y, y = x+a; решая систему уравнений, получаем y = a*(1+$5^{½}$)/2= a*φ.

Следовательно, **OX** = ½***AD** = a*φ/2

Теперь рассмотрим треугольную грань **ABG** икосаэдра и образовавшуюся из нее правильную шестиугольную грань фуллерена. Поскольку отрезок **VY** параллелен **AG**, то треугольники **ABG** и **VBY** подобны, и, следовательно, треугольник **VBY** тоже правильный.

Значит **BY** = **YZ** = **ZG** = a/3.

Обозначив длину C-C связи (отрезок **YX**) как z получаем: **YX** = z/2, a = 3*z,и выражая **OX** через z, получаем **OX** = a*φ/2 = z*3/2*φ

По теореме Пифагора для треугольника **OYX** находим длину отрезка **OY** – искомый радиус описанной вокруг фуллерена окружности:

OY = $(\mathbf{OX}^2 + \mathbf{YX}^2)^{½} = ((z/2)^2 + (z*3/2*\varphi)^2)^{½} = z/2*(1+9\varphi^2)^{½}$

Таким образом, диаметр фуллерена будет равен:

D =2***OY** = $z*(1+9\varphi^2)^{½} = 0{,}142 * (1+9*(1.618)^2)^{½} \approx 0{,}142*4{,}956 \approx$ **0,704 нм**

Реальный диаметр составляет 0,71 нм, что неплохо совпадает с расчетом.

4. По рис. 3. из условия видно, что добавление новых атомов углерода происходит по связям, отходящим от двух «вершин» пятичленных циклов одной из «половинок» фуллерена C_{60}. Поскольку вдоль «линии разреза» находится пять пятиугольных граней, то в одном слое «добавляется» 10 атомов углерода.

Таким образом

формула **Б** – $\mathbf{C_{70}}$**,**

гомологи – $\mathbf{C_{60+10n}}$

5. Длина нанотрубки L складывается из длины двух полусфер и длины вставки, кратной числу добавленных слоев (см. рисунок):

L = D/2 + n*l + D/2 = D + n*l

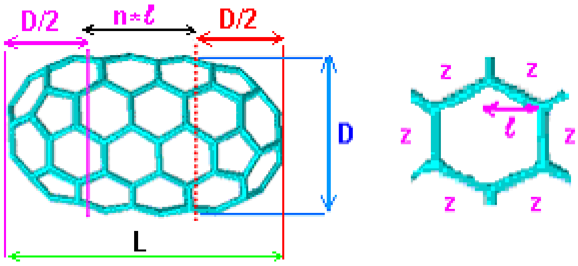


Рисунок – иллюстрация к ответу.

Каждый слой вставки увеличивает длину нанотрубки на ***l*** – половину длины малой диагонали правильного шестиугольника (хотя шестиугольник немного согнут, при такой деформации длина малых диагоналей, перпендикулярных направлению изгиба, не изменяется). Длина половины диагонали будет равна ***l*** = z*sin(60°).

По условию имеем: L> 100*D,

значит D + n*l> 100*D

Преобразуем n> 99*D/lили $n>99*(1+9\varphi^2)^{½}/\sin(60°)$

Тогда получаем **n> 566.55**

Поскольку n – целое, то n = 567 (примечание: расчет не по общей формуле, а с использованием округленных значений D приводит к ответу, заниженному на несколько единиц). Таким образом, нанотрубка **X** имеет формулу $C_{60+10*567}$ т.е. $\mathbf{C_{5730}}$

6. В случае нанотрубки**X** вектор **R** (см. рисунок.) проходит по большой диагонали шестиугольников, следовательно, **n** = **m**. Тогда тип нанотрубки – «зубчатая».

Теперь находим **R** = 5*r1* + 5*r2* (см. рисунок, вектор **R** проходит через 10 атомов), получаем **n**= **m**=5,тогда 2*5+5 = 15 – делится на 3, следовательно, нанотрубка **X** имеет металлическую проводимость.

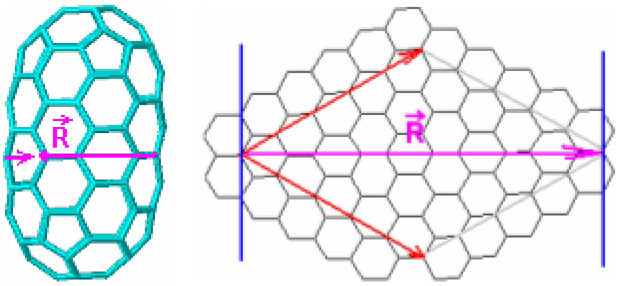


Рисунок – иллюстрация к ответу.

Время жизни ограничено… (2010, школьники, региональный тур)

1. САМАЯ простая задача, правда, только для тех, кто встречался с натуральными логарифмами. Зри в корень! А не в сложнейший механизм люминесценции в металлорганических соединения. Жаль, что некоторые участники испугались этой задачи. Она даже не требует калькулятора. И при этом ... заставляет намертво запомнить, чему равен прямой угол и ... когда год рождения графа, великого писателя, философа Льва Николаевича Толстого. Итак, если мы запишем год рождения Льва Николаевича два раза - 1828 и 1828, потом биссектрису прямого угла в градусах, 45, потом величину самого прямого угла и опять биссектрису, а слева приставим скромно 2.7, то получим с невообразимой точностью (о которой Вы наспор можете выигрывать шоколадки у знакомых) иррациональное число Эйлера e = 2,718 281 828 459 045 235 360 287 471 352 662 497 757… То, что в задаче дается с такой огромной точностью некое число, должно было сразу насторожить участников. И неспроста! потому что в этом случае искомые времена и величины w под экспонентой **должны быть равны** (ведь в задаче ищется время затухания, то есть отношение I_0 к I, а "е" в степени 1 равно строго "е"). Поэтому либо методом внимательного всматривания, либо логарифмированием находим искомое соотношение 0.45 : 1.5 : 3.0 = **3 / 10 / 20.** Последний вопрос на 10 баллов!