Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 4. Симметричные фуллерены: C_{20}, C_{2000} и C_{2020}

1. Запишем в общем виде число вершин, ребер и граней:

- Общее число граней:
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6.$$
- Общее число ребер (одна грань принадлежит двум ребрам):
$$\mathbf{E} = 1/2\cdot(5\mathbf{F}_5 + 6\mathbf{F}_6) = 1{,}5\mathbf{V}.$$
- Общее число вершин (одна вершина принадлежит трем граням, как можно видеть из рисунка):
$$\mathbf{V} = 1/3\cdot(5\mathbf{F}_5 + 6\mathbf{F}_6).$$

Тогда, подставляя в теорему Эйлера, получаем:

$$1/3\cdot(5\mathbf{F}_5 + 6\mathbf{F}_6) - 1/2\cdot(5\mathbf{F}_5 + 6\mathbf{F}_6) + \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6 = 2$$
$$\mathbf{F}_5 = 12.$$

Тогда

$$\mathbf{F}_6 = 0{,}5\mathbf{V} - 10.$$
$$\mathbf{V} = 2020,\ \mathbf{E} = 3030,\ \mathbf{F}_5 = 12,\ \mathbf{F}_6 = 1000.$$

2. Оба вида зависимостей упрощаются до неполной суммы квадратов, приравненной к некоторому числу:

$$\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2 = \mathbf{a}$$
(для икосаэдра $\mathbf{a} = \mathbf{N}_I/20$, для тетраэдра $\mathbf{a} = (\mathbf{N}_T + 8)/4$).

Для начала, найдем диапазон возможных значений (**n**, **m**), выраженный через **a**.

Поскольку пары типа (**n**, **m**) и (**m**, **n**) – это одно и тоже, с точностью до перестановки, то логично ограничить диапазон по **m** сверху как:

$$\mathbf{n} \geq \mathbf{m}\ (0 \leq \mathbf{m} \leq \mathbf{n},\ \mathbf{m} \in [0, \mathbf{n}]).$$

Как следствие из условия $\mathbf{n} \geq \mathbf{m}$, неполная сумма квадратов принимает свое максимальное значение при $\mathbf{n} = \mathbf{m}$:

$$\mathbf{n}^2 + \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} + \mathbf{n}^2 = 3\mathbf{n}^2.$$

Приравнивая его к **a**, получаем величину $\mathbf{n} = \mathbf{m} = \sqrt{a/3}$.

При снижении значения **n** ниже, чем $\sqrt{a/3}$, неполная сумма квадратов будет заведомо меньше **a**, то есть, диапазон по **n** ограничен снизу как:

$$\mathbf{n} \geq \sqrt{a/3} = \mathbf{n}_{min}.$$

В свою очередь, значение неполной суммы квадратов минимально при $\mathbf{m} = 0$:

$$\mathbf{n}^2 + \mathbf{n}\cdot 0 + 0^2 = \mathbf{n}^2.$$

Приравнивая к **a**, получаемвеличину **n** = $\sqrt{a}$.

Как при **n** = $\sqrt{a}$ и росте значения **m**, так и при росте значения **n** выше, чем $\sqrt{a}$ и **m** = 0, неполная сумма квадратов будет заведомо больше **a**, то есть, диапазон по **n** ограничен сверху как:

$$\mathbf{n} \le \sqrt{a} = \mathbf{n}_{\mathbf{max}}.$$

Следовательно, в общем виде, диапазон возможных значений можно записать как:

$$\sqrt{a/3} \le n \le \sqrt{a} \text{ и } 0 \le m \le n \ (\mathbf{n}\in[\sqrt{a/3}, \sqrt{a}],\ \mathbf{m}\in[0, \mathbf{n}]).$$

В случае икосаэдрической симметрии:

$$\mathbf{n}\in \left[\sqrt{N_I/60}, \sqrt{N_I/20}\right].$$

В случае симметрии тетраэдра:

$$\mathbf{n}\in \left[\sqrt{(N_T+8)/12}, \sqrt{(N_T+8)/4}\right].$$

3. Поиск решений квадратного уравнения с двумя неизвестными можно проводить как путем простого перебора возможных значений (вручную, либо написав несложную программу), так и составив таблицу значений для неполной суммы квадратов, например, в программе Excel.

   При ручном переборе, для значений **n** вблизи $\sqrt{a/3}$ следует преимущественно рассматривать значения **m**, близкие к **n** = **m**, а для значений **n** вблизи $\sqrt{a}$ – значения **m**, близкие к 0.

   Проверим, могут ли данные фуллерены быть *икосаэдрическими*.

   C_{20}:

   $20(\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2) = 20$
   $\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2 = 1$
   $0 \le n \le 1$ и $0 \le m \le n$
   Данным условиям удовлетворяет только одна пара чисел:
   n = 1, **m** = 0
   C_{20} может быть икосаэдрическим фуллереном.

   C_{2000}:

   $20(\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2) = 2000$
   $\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2 = 100$
   $6 \le n \le 10$ и $0 \le m \le n$
   Данным условиям удовлетворяет только одна пара чисел[1]:
   n = 10, **m** = 0
   C_{2000} может быть икосаэдрическим фуллереном.

C_{2020}:

$20(\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2) = 2020$

$\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2 = 101$

$6 \le n \le 10$ и $0 \le m \le n$

Уравнение не имеет решений в натуральных числах[2],

для C_{2020} икосаэдрический тип симметрии невозможен.

[1]Все остальные пары чисел из рассматриваемого диапазона дают либо большее, либо меньшее значение в диапазоне [36, 300], например, для **n** = **m** = 6,

$$\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2 = 108.$$

[2]Любые пары чисел из рассматриваемого диапазона дают либо большее, либо меньшее значение в диапазоне [36, 300].

Проверим, могут ли данные фуллерены быть *тетраэдрическими*.

C_{20}:

$4(\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2) - 8 = 20$

$\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2 = 7$

$2 \le n \le 3$ и $0 \le m \le n$

Данным условиям удовлетворяет только одна пара чисел:

n = 2, **m** = 1

C_{20} может рассматриваться как тетраэдрический фуллерен.

C_{2000}:

$4(\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2) - 8 = 2000$

$\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2 = 502$

$13 \le n \le 22$ и $0 \le m \le n$

Уравнение не имеет решений в натуральных числах,

для C_{2000} тетраэдрический тип симметрии невозможен.

C_{2020}:

$4(\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2) - 8 = 2020$

$\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2 = 507$

$13 \le n \le 22$ и $0 \le m \le n$

Уравнение имеет два целочисленных решения:

n = **m** = 13

и изомер **n** = 22, **m** = 1

C_{2020} может быть тетраэдрическим фуллереном.

Подводя итог, получаем:

- для C_{20}: и икосаэдрический (с **n** = 1, **m** = 0), и тетраэдрический (с **n** = 2, **m** = 1), изомеры отсутствуют;
- для C_{2000} возможен только икосаэдрический тип симметрии(с **n** = 10, **m** = 0), изомеры отсутствуют;
- для C_{2020} возможен только тетраэдрический тип симметрии, существуют два изомера, (13, 13) и (22, 1).