



## Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

### Задача 8. Контактное число

При построении нанокластера или кристалла вещества, Природа часто решает математическую задачу о Контактном Числе (КЧ): *какое максимальное число одинаковых шаров можно разместить вокруг центрального, так, чтобы все шары оболочки его касались?* Поиск КЧ привел к диспуту в 1694-м году между Ньютоном и математиком-астрономом Грегори. Ньютон полагал, что контактное число равно 12 (несложно заметить, что в упаковках одинаковых апельсинов, шариков, атомов, число соседей не бывает больше 12-ти), в то же время Грегори считал, что контактное число может быть и больше. Попробуем на основе несложных расчетов получить оценки КЧ сверху.

#### **Контактное число на плоскости**

Рассмотрим максимально плотную упаковку из одного слоя одинаковых атомов-шаров на плоскости («монослой»).

1. Найдите КЧ при заполнении атомами плоскости. Дайте краткое обоснование. **(1 балл)**
2. Оцените, сколько атомов радиусом 0.1 нм можно разместить на поверхности сферической наночастицы радиусом 10 нм. **(2 балла)**

#### **Вслед за Грегори**

Рассмотрим кластер, в котором вокруг центрального атома расположена оболочка из  $N$  атомов и каждый касается центрального. Спроецируем все атомы оболочки на некоторую далекую сферу радиуса  $R'$  (см. рисунок).

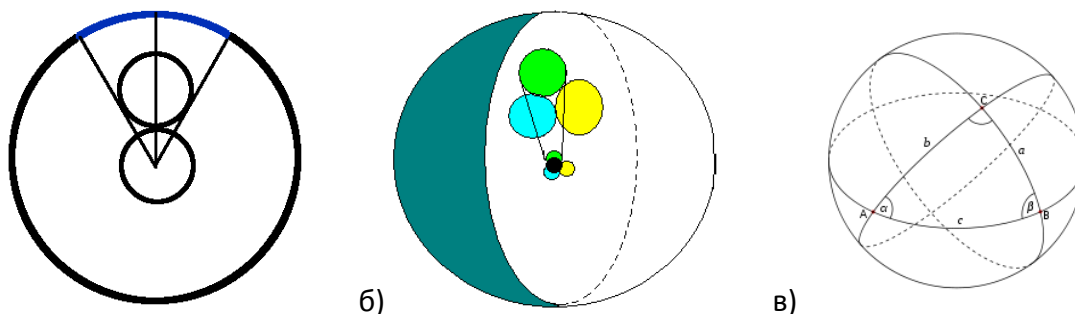


Рис. а) Проекция одного атома на далекую сферу. б) Проекция трех атомов, касающихся центрального, на далекую сферу. в) Сферический треугольник  $ABC$ .

Его площадь равна  $S_{\Delta ABC} = R'^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ , где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  – углы между плоскостями, формирующими стороны сферического треугольника.

Самую грубую оценку сверху КЧ можно получить, ответив на вопрос:

3. Во сколько раз площадь сферы радиуса  $R'$  больше площади проекции на нее одного атома, касающегося центрального? **(2 балла)**
4. Допустим, все атомы оболочки касаются друг друга и их центры образуют правильные треугольники. Рассчитайте, во сколько раз площадь сферы радиуса  $R'$  больше площади сферического треугольника, являющегося проекцией центров трех касающихся атомов. Воспользовавшись теоремой Эйлера, оцените, какому числу атомов теоретически отвечает полученное число «треугольных граней». **(5 баллов)**

Сейчас уже точно известно, что, несмотря на кажущееся наличие в оболочке места под 13-й шар, невозможно «сгруппировать» 12 шаров так, чтобы 13-й тоже касался центрального. Потребовалось несколько столетий со времени спора Ньютона и Грегори для строгого решения этой задачи. Теорема Эйлера:  $V - E + F = 2$ , где  $V$ ,  $E$ ,  $F$  – число вершин, рёбер и граней многогранника.

**Всего – 10 баллов**