физика

Физика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 5. Наноспутники

Воспользуемся законом сохранения энергии. Микроракета совершает полезную работу, используя внутреннюю энергию топлива. Эта полезная работа преобразуется в выигрыш в полной механической (кинетической и потенциальной) энергии самой ракеты и выводимого ей на орбиту груза по сравнению со значением этой энергии у поверхности Земли. В системе отсчета, связанной с Землей, примем за ноль потенциальной энергии $E_{\text{пот}}$ точку, расположенную на бесконечном удалении от Земли, т.е. для тела массы m справедливо: $E_{\text{пот}}(r) = -\frac{mgR^2}{r}$, где R – средний радиус Земли. Тогда, учитывая отсутствие начальной кинетической энергии у груза массы m и ракеты массы M с запасом топлива ΔM, прирост их совокупной механической энергии при выходе на орбиту с радиусом r (он отсчитывается от центра Земли) составит:

$$\Delta E = E_{\text{кон}}(r) - E_{\text{нач}}(R) = \frac{(m+M)v^2}{2} - \frac{(m+M)gR^2}{r} + (m+M+\Delta M)gR$$

где учтено, что начальная энергия системы груз+ракета+топливо у поверхности Земли ($r = R$) равна:

$$-(m+M+\Delta M)gR$$

Поскольку орбита является круговой, конечная скорость груза и ракеты v будет определяться только радиусом орбиты: $v^2 = \frac{gR^2}{r}$. Тогда:

$$\Delta E = -\frac{(m+M)gR^2}{2r} + (m+M+\Delta M)gR$$

Приравнивая этот выигрыш для двух грузов различной массы $m_1 = 180$ кг и m_2 (суммарная масса наноспутников), выводимых на орбиты с радиусами r_1 и r_2, соответственно, получаем:

$$-\frac{(m_1+M)gR^2}{2r_1} + (m_1+M+\Delta M)gR = -\frac{(m_2+M)gR^2}{2r_2} + (m_2+M+\Delta M)gR$$

Подставляя $r_1 = R + \frac{R}{20}$ и $r_2 = R + \frac{R}{10}$ и упрощая, получаем:

$$\frac{11}{21}m_1 = \frac{6}{11}m_2 + \frac{5}{231}M$$

Откуда, подставляя $m_1 = 180$ кг и $M = 1320$ кг, получаем $m_2 \approx 120$ кг. Таким образом, микроракета может вывести на орбиту с радиусом r_2 максимум 15 наноспутников массой по 8 кг.