физика

Физика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 1. Двойная нанопленка

Учитывая разность хода волн, зависимость напряженности электрического поля можно для каждого из трех лучей выразить как:

$$E_1 = E_0 cos(\omega t) \quad (1)$$

$$E_2 = E_0 cos(\omega t - \alpha) \quad (1)$$

$$E_3 = E_0 cos(\omega t - \alpha - \beta) \quad (2)$$

при этом:

$$\alpha = \frac{2\pi n_1 d_1}{\lambda} \quad (3)$$

$$\beta = \frac{2\pi n_2 d_2}{\lambda} \quad (4)$$

Таким образом, суммарная напряженность *E* будет равна:

$$E = E_0 cos(\omega t) + E_0 cos(\omega t - \alpha) + E_0 cos(\omega t - \alpha - \beta) \quad (5)$$

$$E = E_0\big(cos(\omega t) + cos(\omega t)cos\alpha + sin(\omega t)sin\alpha + cos(\omega t)cos(\alpha+\beta) + sin(\omega t)sin(\alpha+\beta)\big) \quad (6)$$

$$E = E_0\Big(cos(\omega t)\big(1 + cos\alpha + cos(\alpha+\beta)\big) + sin(\omega t)\big(sin\alpha + sin(\alpha+\beta)\big)\Big) \quad (7)$$

Для того, чтобы привести к формуле косинуса суммы, вычислим сумму квадратов коэффициентов при cos и sin ωt:

$$\Sigma = \big(1 + cos\alpha + cos(\alpha+\beta)\big)^2 + \big(sin\alpha + sin(\alpha+\beta)\big)^2 = 1 + cos^2\alpha + cos^2(\alpha+\beta) + 2cos\alpha + 2cos(\alpha+\beta) + 2cos\alpha cos(\alpha+\beta) + sin^2\alpha + sin^2(\alpha+\beta) + 2sin\alpha sin(\alpha+\beta) \quad (8)$$

Учитывая основное тригонометрическое тождество и формулу для косинуса разности, получаем

$$\Sigma = 3 + 2cos\alpha + 2cos(\alpha+\beta) + 2[cos\alpha cos(\alpha+\beta) + sin\alpha sin(\alpha+\beta)] = 3 + 2cos\alpha + 2cos(\alpha+\beta) + 2cos\beta \quad (9)$$

Далее используем формулу для косинуса двойного угла (a + b) и формулу для суммы косинусов:

$$\begin{gathered}\Sigma = 3 + 2cos\alpha + 2cos\beta + 4cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - 2 = \\ 1 + 4cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + 4cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \\ 1 + 4cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right) = \\ 1 + 8cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\end{gathered} \tag{10}$$

С учетом полученного тождества выражение для напряженности поля примет вид:

$$E = E_0\sqrt{\Sigma}cos(\omega t + \phi_0), \tag{11}$$

где ϕ_0 – сдвиг фаз. Отсюда амплитуда интенсивности отраженного луча будет равна:

$$I = I_0\Sigma \tag{12}$$

Очевидно, что критерием минимума является равенство нулю Σ:

$$cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)cos\frac{\alpha}{2}cos\frac{\beta}{2} = -\frac{1}{8} \tag{13}$$

Критерий выполняется, например, в случае:

$$\begin{gathered}\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \\ \alpha = \beta = -2\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z\end{gathered} \tag{14}$$

Подставляя значения для сдвигов по фазе:

$$2\pi n_1\frac{d_1}{\lambda} = 2\pi n_2\frac{d_2}{\lambda} = 4\frac{\pi}{3} \tag{15}$$

$$n_1d_1 = n_2d_2 = 2\frac{\lambda}{3} = 800\text{ нм} \tag{16}$$

Отсюда d_1 = 500 нм, d_2 = 400 нм.