



Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)

Задача 8. Вот, новый поворот

Несколько лет назад в семействе углеродных материалов появилась новинка – двухслойный графен¹, свойства которого, прежде всего, электронные, отличны как от графена, так и от многослойного графита. Значительная часть этих свойств определяется взаимным расположением атомов углерода двух слоев друг относительно друга. Самым интересным является так называемый повернутый графен, в котором слои повернуты друг относительно друга на некоторый произвольный угол ($0^\circ < \theta < 30^\circ$). В этом случае наблюдаются периодические структуры с шагом, превышающим период графенового листа (рис. 1), так называемый муаровый узор (периодический узор, возникающий как результат интерференции при наложении двух периодических сетчатых рисунков).

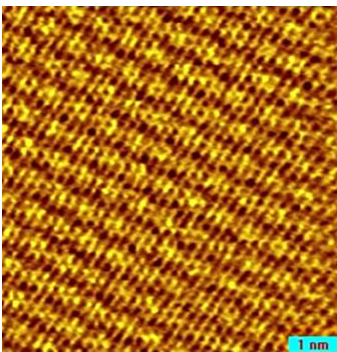


Рис. 1

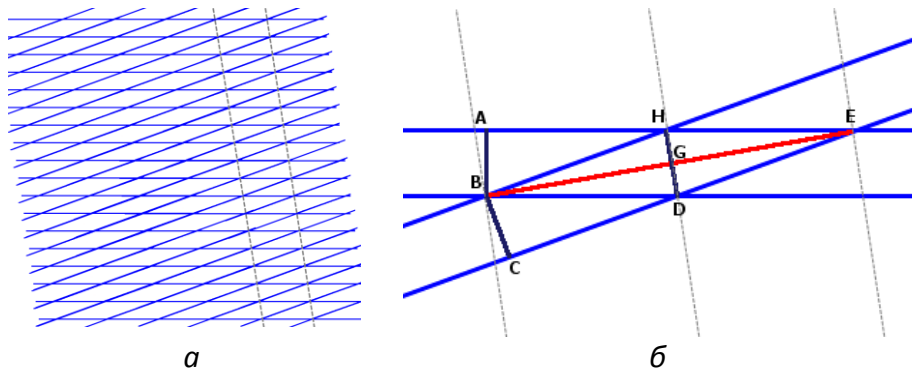


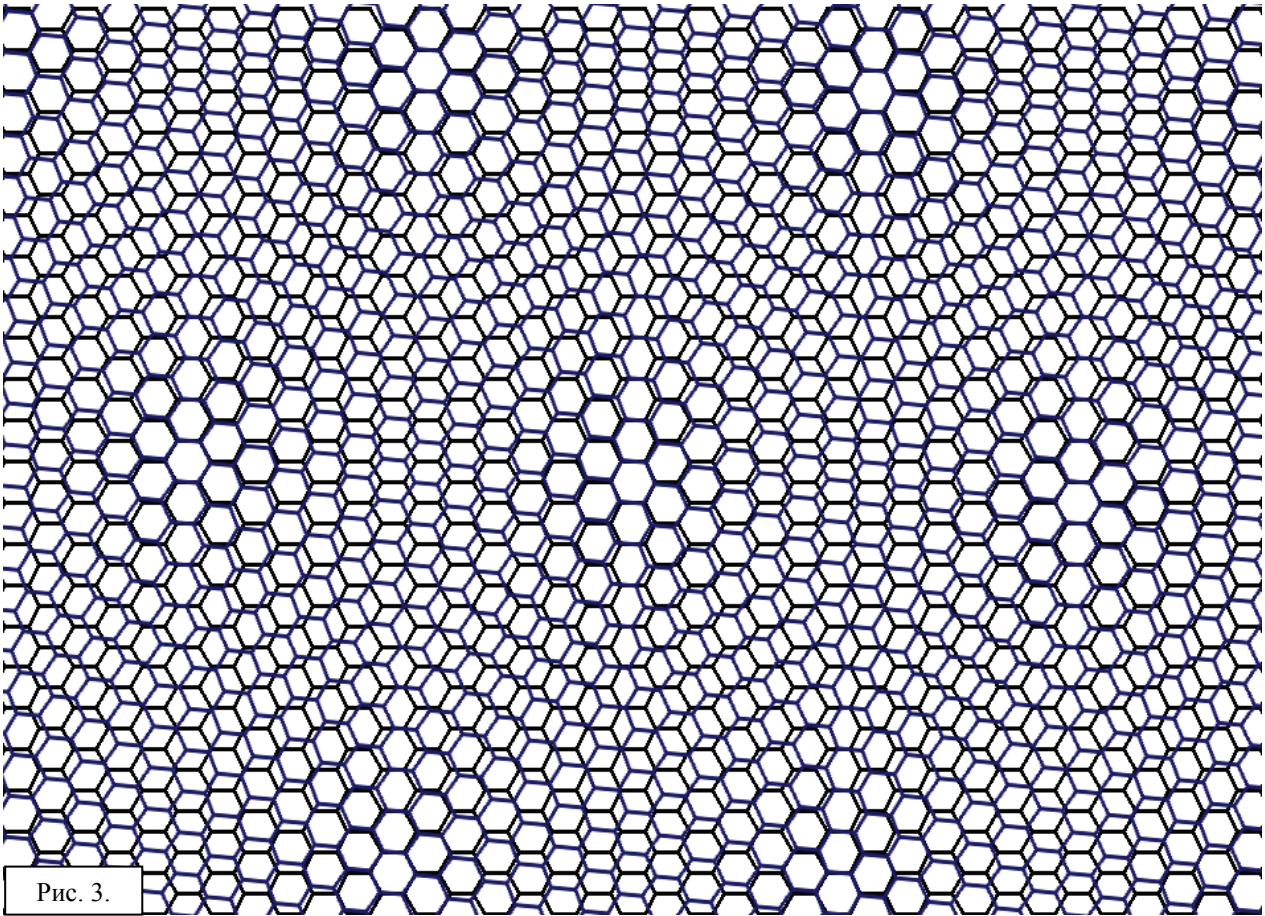
Рис. 2. Простейший муаровый узор (а) возникает при пересечении двух систем равноудаленных параллельных линий (б, пары линий AE , BD и BH , CE), повернутых друг относительно друга на некоторый угол $\vartheta = \angle HBD$. Если посмотреть на такой узор (а) издалека, то можно увидеть чередование более темных и более светлых полос (отмечены пунктиром). Минимальное расстояние между светлыми полосами (шаг повтора муарового узора) составляет $BG = L$.

1. Выведите общий вид зависимости $L(\theta)$ для простейшего муарового узора (рис. 2), если расстояние между параллельными линиями составляет $AB = BC = d$. (3 балла)

Рассмотрим пример (рис. 3) наложения двух графеновых сеток¹, одна из которых повернута относительно другой так, что ось вращения лежит по центру одного из шестиугольников.

2. Отметьте на рисунке 3 предполагаемую ось вращения, а также точки, в которых муаровый узор идентичен первой отметке. Проведя необходимые геометрические построения, определите индексы хиральности $(n, m)^2$ для кратчайшего отрезка, соединяющего пару отмеченных точек относительно первой (черной) и второй (синей) сетки шестиугольников. (2 балла)

3. Основываясь на полученных величинах (n , m), рассчитайте угол θ между осями координат двух графеновых сеток и длину отмеченного отрезка L (в нм). **(4.5 балла)**
Атомы углерода считать точечными, длину связи С–С равной $a = 0,14$ нм.



4. Исходя из найденных величин (L , θ для рис. 3), по формуле, выведенной в п. 1, рассчитайте величину d для графена. Какому из параметров шестиугольной графеновой сетки (сторона шестиугольника, его малая или большая диагональ) соответствует полученное значение? **(1.5 балла)**

В условиях эксперимента определить индексы хиральности, как правило, невозможно. В то же время, современные спектроскопические методы позволяют достаточно точно измерить шаг повтора муарового узора L . Муаровый узор для повернутого двухслойного графена можно наблюдать, например, при помощи сканирующего туннельного микроскопа (СТМ).

5. Оцените величины угла θ для четырех образцов, представленных на рис. 4. **(6 баллов)**

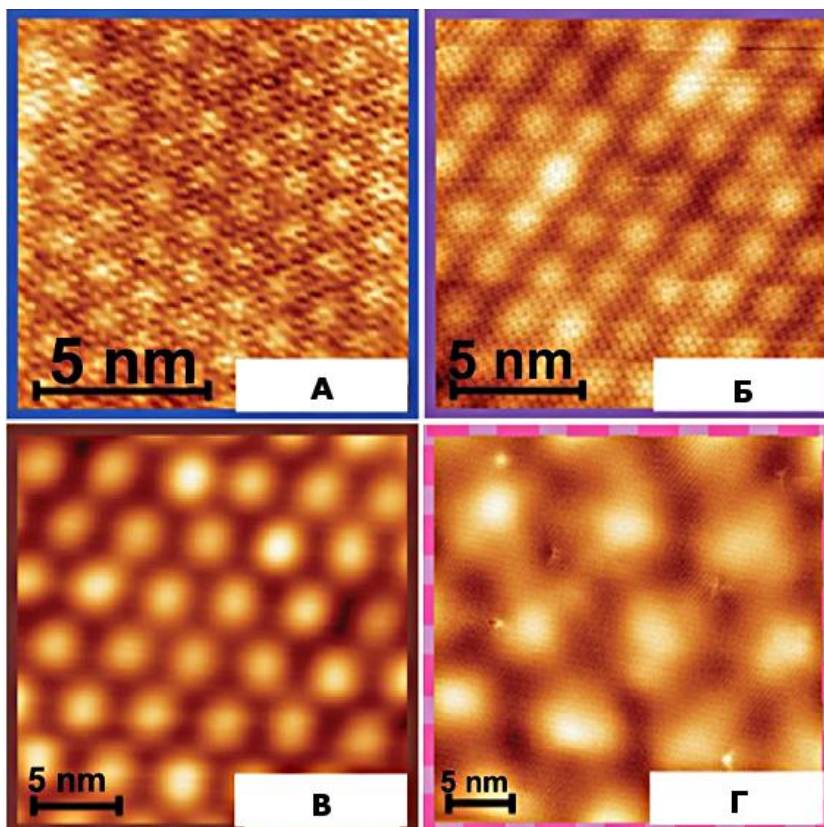


Рис. 4. СТМ-изображения четырех образцов двухслойного повернутого графена.

¹ Графен – слой атомов углерода толщиной в один атом, соединенных в гексагональную двумерную решетку (рис. 5). Можно представить как одну плоскость графита, отделенную от объемного кристалла.

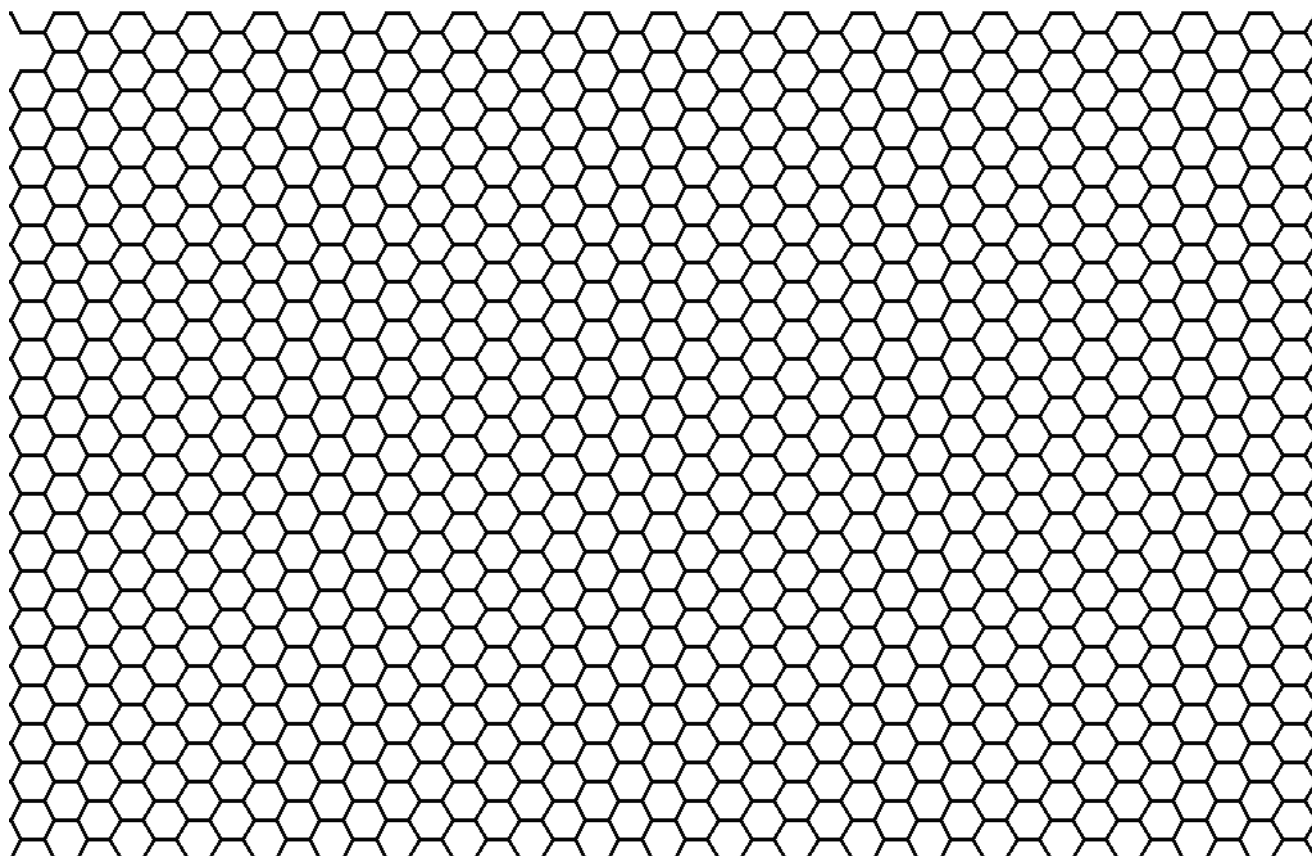


Рис. 5. Вспомогательный материал. Схема сетки шестиугольников листа графена.

² Рис. 6.

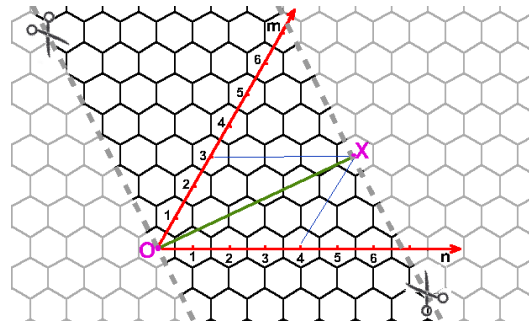


Рис. 6. Пример развертки УНТ (4,3).

Любую пару шестиугольников на графеновом листе можно описать парой натуральных чисел (n,m) , являющихся координатами центра одного из них относительно центра другого в косоугольной системе координат. Такая пара чисел носит название *индексов хиральности* и может, например, задавать ширину развертки углеродной нанотрубки.

Всего – 17 баллов