Математика для школьников 7 – 11 класса (заключительный этап)
Вариант IV

Задача 1. Нанонить (8 баллов)

Вольфрамовую проволоку диаметром $\mathbf{d_1}$ = 4,6 мкм вытягивают в нанонить толщиной $\mathbf{d_2}$ = 100 нм.

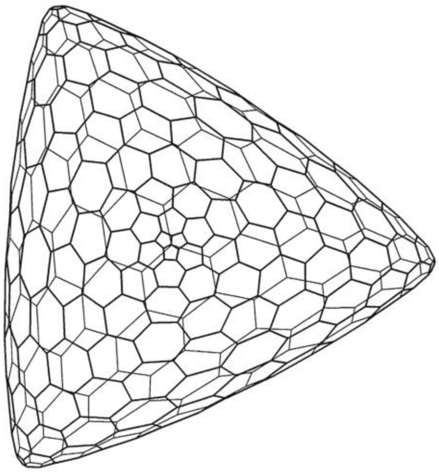
Во сколько раз при этом увеличивается:

а) ее длина? **(4 балла)**

б) площадь ее поверхности? **(4 балла)**

Считать, что плотность материала при его вытягивании неизменна.

Задача 2. Тетраэдрические матрешки (8 баллов)



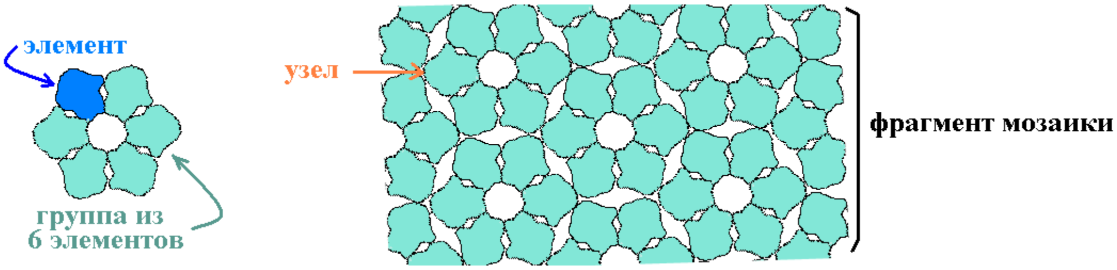
Рассмотрим фуллерены (углеродные каркасные молекулы) в форме тетраэдра, в которых пара целых неотрицательных чисел **n** и **m** (**n** ≥ **m**) задает число атомов по формуле

$$\mathbf{N} = 4(\mathbf{n}^2 + \mathbf{nm} + \mathbf{m}^2) - 8.$$

Для некоторой фуллереновой матрешки, представляющей собой два вложенных друг в друга тетраэдрических фуллерена (**n**, **n**) и (**n** + 1, **n** + 1), существует имеющий такое же число атомов тетраэдрический фуллерен (**x**, **y**).

Найдите **n**, **x**, **y**, если известно, что **x** + **y** = 3**n** – 1, **x** – **y** = 11.

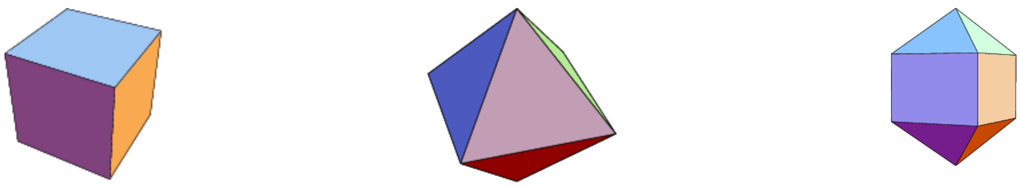
Задача 3. Мозаика вирусного капсида (8 баллов)



Оболочка многих вирусов (капсид) представляет собой замкнутую мозаику, которая складывается из одинаковых белковых *элементов*. Элементы в структуре мозаики, в свою очередь, объединены в *группы* по 5, 6 и 7 штук так, что в любом узле мозаики эти группы сходятся по 3 (см. рисунок).

Капсид некоторого гигантского вируса содержит 1997 и 6 групп по 6 и 7 элементов, соответственно. Воспользовавшись теоремой Эйлера для выпуклых многогранников, рассчитайте общее число элементов **N** и общее число групп элементов **G** в таком капсиде.

Задача 4. Адсорбент (8 баллов)



В лаборатории получены наночастицы некоторого Адсорбента в форме куба, октаэдра и правильной удлиненной квадратной бипирамиды, см. рисунок.

Рассчитайте длину ребра **A** (в нм) для каждого из видов наночастиц, если известно, что отношение площади поверхности к объему **S**/**V** у них одинаково и равно 1,2 нм$^{-1}$.

Задача 5. Два наносвертка (8 баллов)

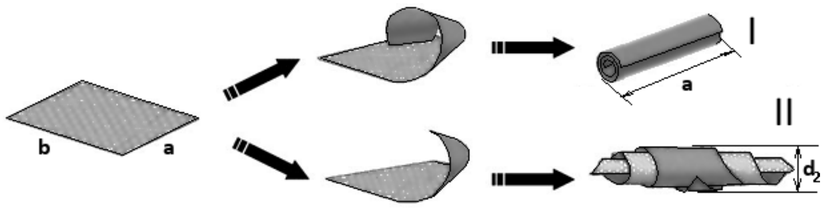


Рис. 1.

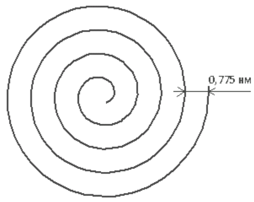


Рис. 2.

Прямоугольный лист двумерного наноматериала – дисульфида вольфрама – в некоторых условиях может сворачивается без зазоров в наносвертки двух типов (рис. 1):

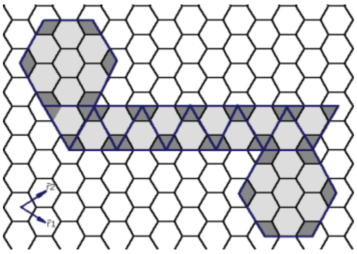
- **I** тип – продольный (сворачивается вдоль длинного края, **b** > **a**),
- **II** тип – диагональный (сворачивается вдоль диагонали прямоугольника).

Поперечное сечение этих наносвертков представляет собой спираль с шагом витка, равным толщине листа дисульфида вольфрама, **c** = 0,775 нм (рис. 2).

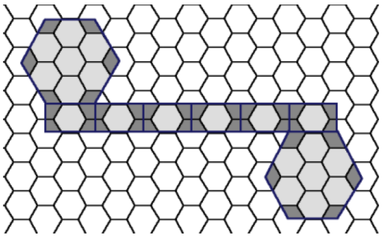
Оцените длину **a** (в нм) наносвертка **I** типа, если длина исходного листа равна **b** = 500 нм, а максимальный диаметр наносвертка **II** типа составляет $\mathbf{d}_2$ = 25 нм.

Задача 6. Шестиугольный фуллерен (20 баллов)

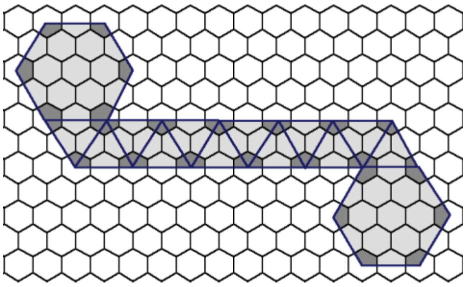
Рассмотрим 4 типа фуллеренов (углеродных каркасных молекул, состоящих из пяти- и шестиугольников), форма которых подобна шестиугольной призме либо шестиугольной антипризме (рис. 1). Каждый тип однозначно определяется двумя парами индексов (**n**, **m**)[1], задающими длину ребра основания и длину бокового ребра, соответственно.



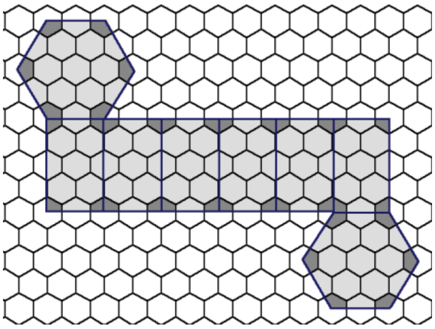
*а) 1 тип, ((**n**, **n**), (**n**, **n**))*



*б) 2 тип, ((**n**, **n**), (**n**, 0))*



*в) 3 тип, ((**n**, 0), (**n**, 0))*



*г) 4 тип, ((**n**, 0), (**n**, **n**))*

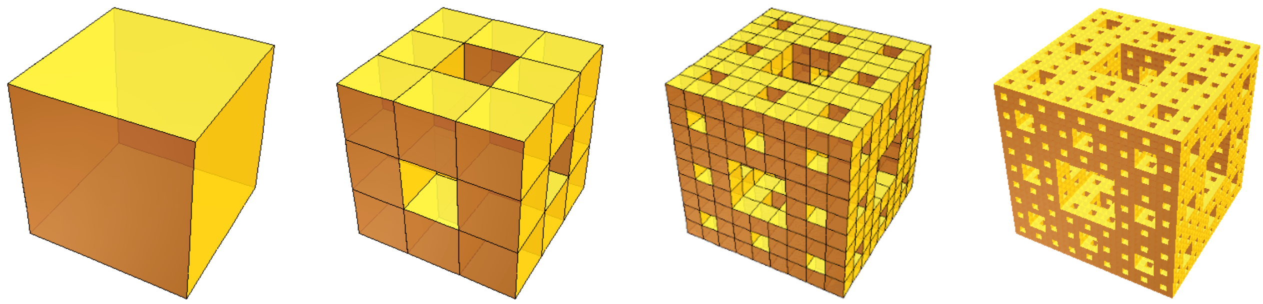
Рис. 1. Примеры «выкроек» четырех типов шестиугольных фуллеренов на листе графена. На а) показаны единичные вектора r_1 и r_2, задающие косоугольную систему координат[1].

1. Для каждого из 4 типов фуллеренов выведите в общем виде зависимость общего числа атомов углерода **N** от **n**. **(6 баллов)**
2. Для каждого из фуллеренов, представленных на рис. 1:
   а) определите значение параметра **n**; **(2 балла)**

   б) рассчитайте число атомов **N**. **(2 балла)**
3. Могут ли фуллерены разных типов иметь одинаковое число атомов? Рассмотрите все возможные комбинации, ответ подтвердите расчетами. **(3 балла)**
4. Для фуллеренов, имеющих форму шестиугольной призмы, выведите формулы зависимости размера (как диаметра **D** описанной вокруг призмы сферы) от **n** и длины С–С связи **a**. **(5 баллов)** Найдите размеры таких фуллеренов, изображенных на рис. 1б и 1г, если **a** = 0,14 нм. **(2 балла)**

[1]Любую пару шестиугольников на графеновом листе можно задать парой неотрицательных чисел (**n**,**m**), являющихся координатами центра одного из них относительно центра другого в косоугольной системе координат (см. рис. 1а): $\vec{R} = n\vec{r}_1 + m\vec{r}_2$.

Задача 7. Губка Менгера (20 баллов)



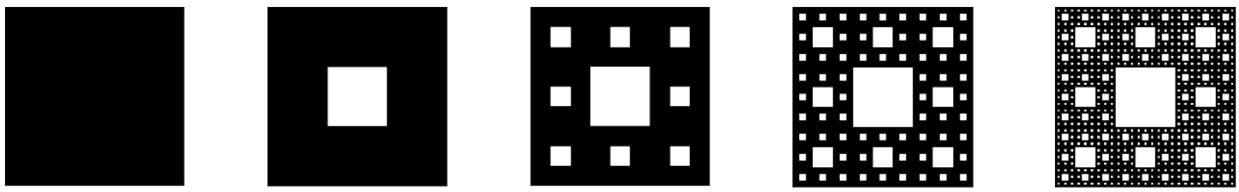
*а) **i** = 0* *б) **i** = 1* *в) **i** = 2* *г) **i** = 3*

Рис. 1. Поколения губки Менгера.

Если взять 20 одинаковых наночастиц в виде куба (рис. 1а, **i** = 0), то из них можно сложить «полый куб» – первое поколение губки Менгера (рис. 1б, **i** = 1). Из 20 таких губок с **i** = 1 аналогичным образом получается второе поколение (рис. 1в, **i** = 2), и так далее. Такие самоповторяющиеся структуры носят название фрактальных и достаточно часто встречаются в природе.

Рассмотрим губку Менгера **i**-го поколения, полученную из исходного куба с ребром **a**.

1. Найдите:
   а) длину ребра $\mathbf{A_i}$ итогового нанокластера; **(1 балл)**
   б) объемную долю пустот $\boldsymbol{\omega_i}$ в таком нанокластере; **(4 балла)**
   в) минимальное значение $\mathbf{i_{min}}$, для которого $\boldsymbol{\omega_i} \geq 0{,}9$. **(3 балла)**



*а) **i** = 0* *б) **i** = 1* *в) **i** = 2* *г) **i** = 3* *д) **i** = 4*

Рис. 2. Фрактальная структура грани губки Менгера.

2. Выведите формулу площади отдельной грани нанокластера $\mathbf{S_{гр}}$ (рис. 2) **i**-го поколения. **(2 балла)**
3. Выведите формулы для расчета площади всей (и внутренней, и внешней) поверхности такого нанокластера $\mathbf{S_i}$ для губки Менгера:
   а) 1-го, 2-го, 3-го поколения; **(3 балла)**
   б) **i**-го поколения. **(4 баллов)** Ответ предоставьте в наиболее компактном виде.

Вклад поверхности в свойства материалов, обладающих каталитической активностью, прямо пропорционален характеристике $\boldsymbol{\Upsilon_i} = \mathbf{S_i/V_i \cdot a}$.

4. Рассчитайте величину $\boldsymbol{\Upsilon_i}$ для губки Менгера **i**-го поколения. **(1,5 балла)**
5. Увеличивается или уменьшается $\boldsymbol{\Upsilon_i}$ с ростом **i**? Чему равно предельное значение этой величины? **(1,5 балла)**

Задача 8. Биметаллический кубооктаэдр. Часть 2 (20 баллов)

Для повышения каталитической активности кубооктаэдрического нанокластера, состоящего из атомов металла **A**, часть атомов заменили на атомы **B** таким образом, что:

- атомы **B** присутствуют только в слоях, на ребро которых приходится **n** = 2**k** атомов (где **k** – натуральное число);
- взаимное расположение атомов **A** и **B** на гранях нанокластера показано на рис. 1–3 (атомы **B** отмечены более темным цветом).

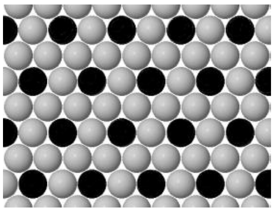


*Рис. 1. Взаимное расположение атомов **A** и **B** на треугольных гранях нанокластера A_xB_y.*

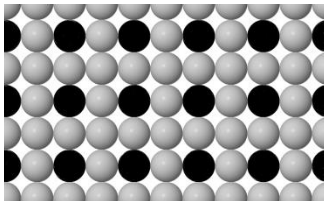
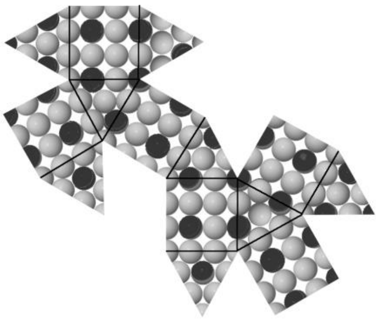
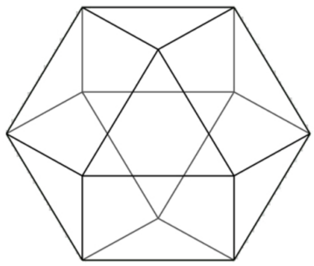


*Рис. 2. Взаимное расположение атомов **A** и **B** на квадратных гранях нанокластера A_xB_y.*



а)



б)

*Рис. 3. а) Двумерная развертка поверхностного слоя биметаллического нанокластера A_xB_y в форме кубоктаэдра. Пример для **n** = 4. б) Кубооктаэдр.*

1. Сколько атомов **B** находится в поверхностном слое кубооктаэдрического биметаллического нанокластера A_xB_y, на ребро которого приходится:
   а) 4 атома? **(2 балла)**
   б) **n** = 2**k** атомов? **(4 балла)**
2. Рассчитайте долю атомов **B** на поверхности нанокластера A_xB_y, на ребро которого приходится:
   а) 4 атома; **(1 балл)**
   б) **n** = 2**k** атомов; **(2 балла)**
   в) бесконечно большое число атомов. **(2 балла)**

3. Чему равно отношение **x:y** в нанокластере A_xB_y, на ребро которого приходится:
   а) 4 атома? **(2 балла)**
   б) **n** = 2**k** атомов? **(2 балла)**
   в) **n** = 2**k** + 1 атомов? **(2 балла)**
   г) бесконечно большое число атомов? **(3 балла)**

Общее число атомов в нанокластере в форме кубооктаэдра составляет

$$\mathbf{N} = (10\mathbf{n}^3 - 15\mathbf{n}^2 + 11\mathbf{n} - 3)/3.$$

Общее число атомов в поверхностном слое нанокластера в форме кубооктаэдра составляет

$$\mathbf{M} = 10\mathbf{n}^2 - 20\mathbf{n} + 12 \text{ (для } \mathbf{n} \geq 2).$$

Дополнительные материалы

Теорема Эйлера для выпуклого многогранника:

$$\mathbf{V} - \mathbf{E} + \mathbf{F} = 2,$$

где **V**, **E**, **F** – это, соответственно, число вершин, ребер и граней многогранника.

При расчетах **π** считать равным 3,1.

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4,\ \sqrt{3} \approx 1{,}7,\ \sqrt{5} \approx 2{,}2,\ \sqrt{7} \approx 2{,}7,\ \sqrt{11} \approx 3{,}3,\ \sqrt{13} \approx 3{,}6,\ \sqrt{17} \approx 4{,}1,\ \sqrt{19} \approx 4{,}4.$$

$$\lg 2 = 0{,}30,\ \lg 3 = 0{,}48,\ \lg 5 = 0{,}70,\ \lg 7 = 0{,}85.$$

Сумма квадратов последовательности натуральных чисел 1, 2, …, **n**:

$$\sum_{m=1}^{n} m^2 = n(n+1)(2n+1)/6.$$