



Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)

Решение задачи 2. Призма

1.

- 1) В качестве первого шага решения выразим длины сторон первой группы квадратов, $x + 1$ и $2x + 1$, через длины сторон второй группы квадратов, a и b , соответственно. Для этого введем следующие обозначения: $d = x + 1$, $e = 2x + 1$. С одной стороны, $y^2 = d^2 + e^2$,

а с другой –

$$y^2 = (a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = 4a^2b^2 + a^4 - 4a^2b^2 + b^4 = (2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2$$

$(a > b)$

Тогда возможны два случая: $d = 2ab$, $e = a^2 - b^2$ либо $d = a^2 - b^2$, $e = 2ab$.

- 2) Запишем систему уравнений, отвечающую первому случаю.

$$x + 1 = 2ab$$

$$2x + 1 = a^2 - b^2$$

$$a + b = 5$$

Выражая b через a , получаем

$$x + 1 = 2a(5 - a)$$

$$x + 1 = 10a - 2a^2$$

$$x = 10a - 2a^2 - 1$$

$$2x + 1 = a^2 - (5 - a)^2$$

$$2x + 1 = 10a - 25$$

$$x = 5a - 13$$

Составим квадратное уравнение относительно a :

$$5a - 13 = 10a - 2a^2 - 1$$

$$2a^2 - 5a - 12 = 0$$

Решая, получаем:

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 2 \cdot 12}}{4} = \frac{5 \pm 11}{4}$$

Поскольку длина ребра кластера не может быть отрицательной, то

$$a = (5 + 11)/4 = 4.$$

Тогда

$$b = 5 - 4 = 1$$

$$x = 5 \cdot 4 - 13 = 7$$

$$y = 4^2 + 1^2 = 17$$

и общее число атомов в кластере составляет $N = 7 \cdot 17^2 = \underline{2023}$.

2. Запишем систему уравнений, отвечающую второму случаю.

$$x + 1 = a^2 - b^2$$

$$2x + 1 = 2ab$$

$$a + b = 5$$

Выражая **b** через **a**, получаем

$$x + 1 = a^2 - (5 - a)^2$$

$$x + 1 = 10a - 25$$

$$x = 10a - 26$$

$$2x + 1 = 2a(5 - a)$$

$$2x + 1 = 10a - 2a^2$$

$$x = 5a - a^2 - 0,5$$

Составим квадратное уравнение относительно **a**:

$$10a - 26 = 5a - a^2 - 0,5$$

$$a^2 + 5a - 25,5 = 0$$

Найдем значение дискриминанта:

$$D = 25 + 4 \cdot 25,5 = 127,$$

что не является квадратом натурального числа, следовательно, данное квадратное уравнение не имеет решения в целых числах.

Таким образом, задача имеет единственное решение: **N = 2023**.