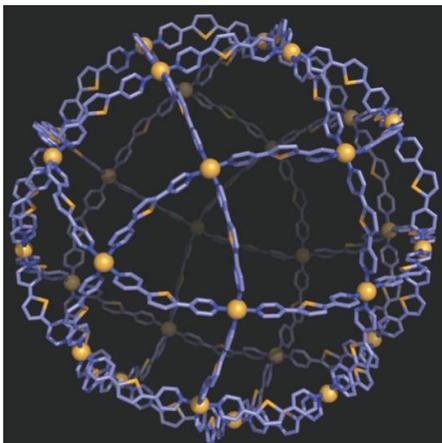
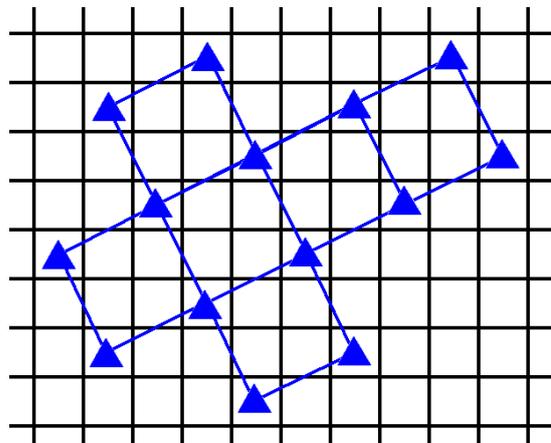




**Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)**  
**Задача 9. Четырехвалентные многогранники Гольдберга**



а) Схематичное изображение каркаса **A**: два типа элементов – атомы металла (желтые шарики) и органические «мостики» (фиолетовые «цепочки»).



б) Развертка многогранника, отвечающего каркасу **A**. Треугольным значком отмечены ячейки, при «склеивании» ребер развертки формирующие треугольные грани.

Рис. 1. Пример молекулярной каркасной структуры  $\Gamma$  – каркас **A**.

Многогранники Гольдберга представляют собой высокосимметричные выпуклые многогранники, составленные из треугольников и квадратов, сходящихся в каждой вершине по четыре. Рассмотрим соответствующие этим многогранникам каркасные структуры ( $\Gamma$ ), в которых вершинам многогранников соответствуют атомы металла, а ребрам – органические «мостики», как показано на примере каркаса **A** (рис. 1а).

Развертку любого четырехвалентного многогранника Гольдберга можно построить на сетке из квадратов, как показано на рисунке 1б.

1. В вершинах какого многогранника лежат треугольные грани  $\Gamma$ ? **(0,5 балла)**
2. Развертку любого каркаса  $\Gamma$  можно однозначно задать на сетке из квадратов при помощи двух целочисленных параметров – **(a, b)**. По рисунку 1б найдите их значения для каркаса **A**. **(1 балл)**
3. Выведите в общем виде зависимость числа атомов металла **M** в каркасе  $\Gamma$  от **(a, b)**. **(2 балла)** Рассчитайте **M** для каркаса **A**. **(1 балл)**
4. Воспользовавшись теоремой Эйлера для выпуклых многогранников, выведите, как число треугольных **F<sub>3</sub>** и квадратных **F<sub>4</sub>** граней в каркасе  $\Gamma$  зависит от **(a, b)**. **(3 балла)** Рассчитайте **F<sub>3</sub>** и **F<sub>4</sub>** для каркаса **A**. **(1 балл)**
5. Основываясь на полученных ранее формулах, определите, могут ли существовать каркасы  $\Gamma$  и соответствующие им четырехвалентные многогранники Гольдберга, содержащие:
  - а. **M** = 2022 атома металла?
  - б. **L** = 2022 органических молекулы?

в.  $F_3 = 2022$  треугольных грани?

г.  $F_4 = 2022$  квадратных грани?

д.  $F = 2022$  грани суммарно?

Если да, найдите все возможные пары  $(a, b)$  для таких каркасов. **(6,5 баллов)**

При решении считать, что  $a > b$ .

**Всего – 15 баллов**