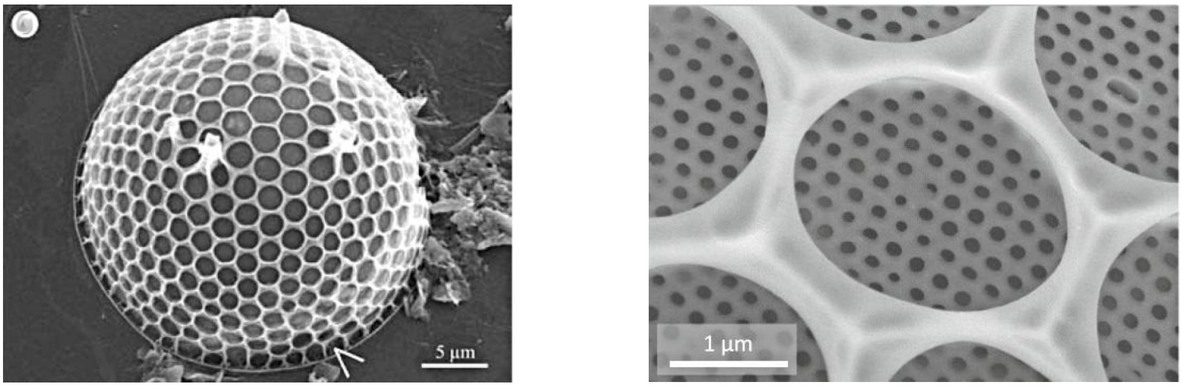
NANOТЕХНОЛОГИИ - ПРОРЫВ В БУДУЩЕЕ!

Математика для школьников 7 – 11 класса (заключительный этап)
Вариант IV

Задача 1. Многогранность диатомовых водорослей (8 баллов)



а *б*

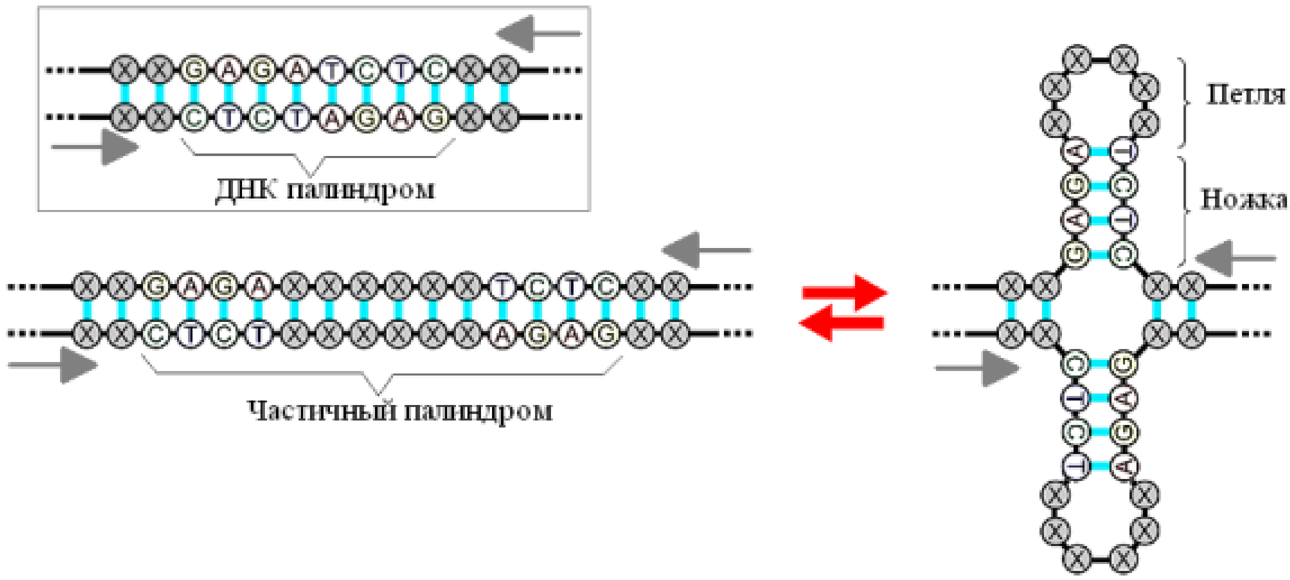
Рис. 1. Изображения «панциря» одноклеточной диатомовой водоросли S. turris, полученные при помощи сканирующей электронной микроскопии.
а) Внешний вид. б) Фрагмент «панциря» с ячейкой в виде условного шестиугольника.

Ажурный «панцирь» некоторой диатомовой водоросли можно представить как выпуклый многогранник, составленный из условных пяти-, шести- и семиугольных ячеек, в каждой вершине которого сходится ровно по три грани (рис. 1).

1. Воспользовавшись теоремой Эйлера, рассчитайте число пяти- и шестиугольных граней в таком многограннике, если он содержит 972 вершины и 122 семиугольных грани. **(3 балла)**

2. Оцените площадь поверхности «панциря» (в мкм^2) и его диаметр (в мкм), если длины ребер многоугольников составляют **d** = 1 мкм. Укажите, какие приближения при этом использовались. **(5 баллов)**

Задача 2. Палиндром (8 баллов)



Двухцепочечная молекула ДНК сформирована всего из четырех «букв»-нуклеотидов – **A**, **C**, **G**, **T**. «Буквы» ДНК из одной цепочки способны связываться попарно (**A** ↔ **T**, **G** ↔ **C**) с буквами из читаемой в противоположном направлении соседней цепочки, называемой комплементарной. Одной из характерных особенностей природной ДНК является наличие ДНК-палиндромов – таких последовательностей ДНК, прочтение которых совпадает с прочтением в обратном направлении по комплементарной цепочке (пример ДНК-палиндрома **CTCTAGAG** показан на рисунке).

1. Вероятность того, что случайная[1] последовательность ДНК длиной **x** является ДНК-палиндромом, составляет 1/4096. Найдите **x**. **(2 балла)**

Важную биологическую роль играют частичные ДНК-палиндромы, имеющие некомплементарные вставки (см. рис.). Например, они являются неотъемлемой частью системы адаптивного иммунитета бактерий CRISPR.

2. Рассчитайте вероятность того, что случайная[1] последовательность ДНК является частичным ДНК-палиндромом с «ножкой» (см. рис.), равной строго[2] 6 нуклеотидов, и «петлей» длиной 4 нуклеотида. **(6 баллов)**

[1] Случайная последовательность ДНК – случайное расположение нуклеотидов в одной из двух цепочек, вторая (комплементарная) цепочка при решении не рассматривается.

[2] То есть, нуклеотиды до и после частичного ДНК-палиндрома, а также крайние нуклеотиды «петли» попарно некомплементарны.

Задача 3. Читая суперпамять (8 баллов)

Большая устойчивость наноструктур внутри кварца позволяет сохранять информацию на кварцевых дисках практически вечно. В то же время, такие диски пока не отличаются рекордными объемами или высокой скоростью чтения данных.

Рассмотрим кварцевый диск диаметром 10 см, на поверхности которого сформирована спиральная последовательность из наноструктур, каждая из которых кодирует 8 бит информации. При этом расстояние между отдельными наноструктурами как в пределах одного витка, так и между соседними витками одинаково и составляет 1 мкм.

1. За какое время прочитается весь диск, если скорость вращения диска постоянна и составляет 1000 оборотов в минуту, а считывающий информацию лазер свободно перемещается вдоль радиуса диска? **(2 балла)**

2. Какая максимальная скорость чтения диска (байт/сек) достигается при чтении? **(3 балла)**

3. Сколько байт информации может храниться на этом диске? **(3 балла)**

Задача 4. Перегруппировка нанотрубки (8 баллов)

Рис. 1.

Одностенные углеродные нанотрубки (УНТ) обладают свойством суперэластичности: под действием растягивающей их силы они могут очень сильно удлиняться без разрушения благодаря перегруппировке структуры УНТ с изменением взаимного расположения шестиугольников в ней (рис. 1).

Рассчитайте, во сколько раз изменилась длина УНТ (11, 9), если после ее полной перегруппировки получилась новая УНТ с индексами хиральности (6, 1).

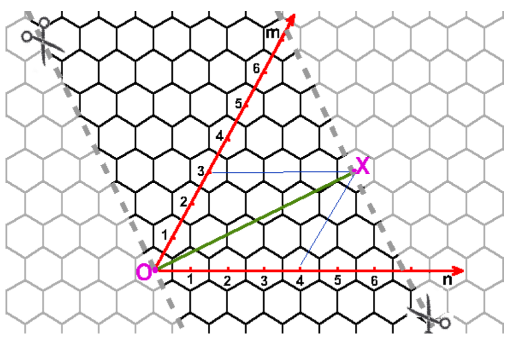


*Рис. 2. Развертка любой УНТ задается взаимным расположением пары шестиугольников (**O** и **X**), совмещаемых при «склеивании» этой развертки в трубку, и представляет собой графеновую ленту шириной **OX**. Неотрицательные числа (**n**, **m**) являются координатами центра одного из этих шестиугольников относительно другого в косоугольной системе координат и называются индексами хиральности УНТ.*
На рисунке приведен пример развертки УНТ (4,3). Пунктиром обозначены линии «отреза».

Задача 5. Композитное волокно (8 баллов)

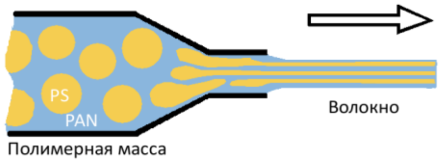
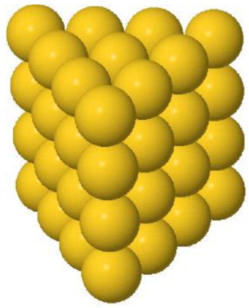


Рис. 1. Схематичное изображение процесса формования композитного волокна: полимерная масса, представляющая собой сферические капли полистирола (PS), равномерно распределенные в объеме полиакрилонитрила (PAN), превращается в волокно, внутри которого в матрице PAN расположены нити PS.

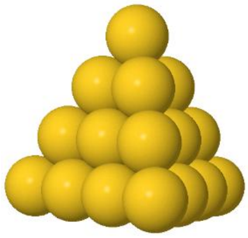
1. Рассчитайте объемную долю **ω** PS в исходной полимерной массе **(3 балла)**, если в итоговом волокне радиус нитей PS составляет $\mathbf{r_{PS}}$ = 25 нм, одна нить PS приходится в среднем на 5800 нм^2 поперечного сечения волокна, а при формовании волокна доля PS не изменяется.

2. Рассчитайте расстояние **L** между каплями PS в исходной полимерной массе **(5 баллов)**, если радиус капель PS составляет $\mathbf{R_{PS}}$ = 93 нм. Считайте, что капли PS распределены в полимерной массе равномерно так, что их центры расположены друг относительно друга как вершины куба.

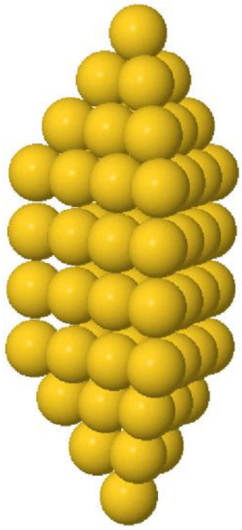
Задача 6. Нанокластеры из треугольных слоев (20 баллов)



*Треугольная призма (**П**)*



*Тетраэдр (**Т**)*



*Равносторонняя удлиненная треугольная бипирамида (**Б**)*

Рассмотрим три типа нанокластеров, в основе построения которых лежит плоский треугольный слой, на ребро которого приходится **n** атомов металла (примеры для **n** = 4 показаны на рисунке). Это нанокластеры в форме

- равносторонней треугольной призмы (**П**), сложенной из **n** одинаковых треугольных слоев;
- тетраэдра (**Т**), сложенного из **n** треугольных слоев, на ребро которых приходится от одного до **n** атомов металла;
- равносторонней удлиненной треугольной бипирамиды (**Б**), представляющей собой равностороннюю призму (**П**), на торцах которой были достроены тетраэдры.

1. Запишите зависимость общего числа атомов металла $\mathbf{N_0}$ в плоском треугольном слое от числа атомов **n**, приходящихся на его ребро. **(1 балл)**
2. Для нанокластеров в форме а) **П**, б) **Т**, в) **Б** выведите зависимость общего числа атомов металла **N** в нанокластере от числа атомов **n**, приходящихся на его ребро. **(3 балла)**
3. Из атомов некоторого нанокластера в форме **Б**, на ребро которого приходится **x** атомов, можно собрать без остатка нанокластер в форме **П**, на ребро которого приходится на один атом больше. Найдите все возможные **x** > 1, удовлетворяющие этому условию. **(2 балла)**
4. Для нанокластеров в форме а) **П**, б) **Т**, в) **Б** выведите зависимость общего числа атомов металла в поверхностном слое **M** от числа атомов **n**, приходящихся на его ребро. **(5 баллов)**

5. Если взять два одинаковых нанокластера в форме **T**, на ребро каждого из которых приходится **y** атомов, то из составляющих эти нанокластеры атомов можно собрать без остатка поверхностный слой нанокластера в форме **Б** также с ребром **y** атомов. Найдите все **y** > 1, удовлетворяющие данному условию. **(3 балла)**

6. Для нанокластеров в форме **T** и **Б** из в. 4, отвечающих максимальному из найденных значений **n**,

   а) Рассчитайте **N** и **M**. **(1 балл)**

   б) Оцените размер кластера как минимальный диаметр сферы, внутри которой находятся все атомы. Радиус атома металла примите равным **r** = 0,14 нм. **(5 баллов)**

Задача 7. Рекордный каркас (20 баллов)

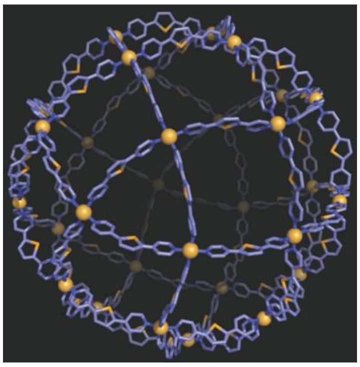


Рис. 1. Схематичное изображение МОКС-90: два типа элементов – 30 атомов металла (узлы каркаса) и 60 органических «мостиков» (ребра каркаса).

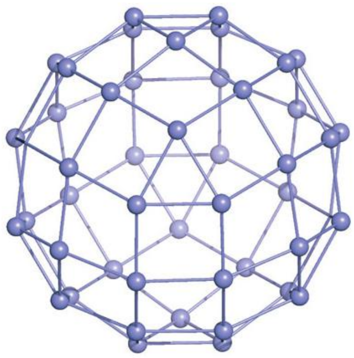


Рис. 2. Схематичное изображение структуры МОКС-144.

Рассмотрим такие металлоорганические каркасные структуры (МОКС), в которых соединенные органическими «мостиками» атомы металла образуют высокосимметричный выпуклый многогранник, составленный из треугольников и квадратов так, что в каждой вершине сходятся по четыре ребра (рис. 1).

Общее число атомов металла **M** в таких МОКС может быть записано как

$$\mathbf{M} = 6(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2), \qquad (1)$$

где **a**, **b** – целые неотрицательные числа.

1. Воспользовавшись, если это необходимо, теоремой Эйлера для выпуклых многогранников, найдите, чему равны **M**, **a**, **b**, общее число органических «мостиков» **L**, а также число треугольных $\mathbf{F_3}$ и квадратных $\mathbf{F_4}$ граней для многогранников, отвечающих:

   а) самой маленькой каркасной структуре, задаваемой формулой (1). Как называется соответствующий ей многогранник? **(2 балла)** б) МОКС, в которой все треугольные грани имеют попарно общие вершины. Как называется этот многогранник? **(2,5 балла)**

в) самой маленькой МОКС, в которой треугольные грани разделены между собой, то есть, не имеют общих вершин. **(2,5 балла)**

2. В 2016 году путем самосборки был синтезирован рекордный каркас МОКС-144, состоящий из 144 структурных элементов (атомов металла и органических «мостиков», см. рис. 2). Рассчитайте для него **M**, **L**, **a**, **b**, а также число треугольных $\mathbf{F_3}$ и квадратных $\mathbf{F_4}$ граней. **(3 балла)**

С помощью моделирования было показано, что из одного и того же набора атомов металла и «мостиков» ($\mathbf{M_{II}}$ = **M** и $\mathbf{L_{II}}$ = **L**) можно построить не только многогранники, отвечающие рассмотренным МОКС, но и каркасы МОКС-II, имеющие форму многогранников, составленных из треугольников, квадратов и пятиугольников, в каждой вершине которых сходятся одна треугольная, две квадратных и одна пятиугольная грань.

3. Воспользовавшись, теоремой Эйлера для выпуклых многогранников, найдите общее число пятиугольных граней $\mathbf{F_5}$ для произвольного МОКС-II. **(2 балла)** Рассчитайте число треугольных $\mathbf{F_3}$, квадратных $\mathbf{F_4}$ и пятиугольных $\mathbf{F_5}$ граней для МОКС-II-144. **(4 балла)**

4. Оцените длину органического «мостика» в МОКС-144, если известно, что размер этой каркасной структуры составляет 7 нм. Перечислите сделанные при расчете допущения. **(4 балла)**

Задача 8. Самосборка молекулярных треугольников (20 баллов)

Методом самосборки из двух видов молекул (**BPyB** и **L-Trp**, рис. 1а) были получены наноструктуры в виде двумерных треугольников Серпинского $\mathbf{T_n}$ четырех разных поколений **n**, построенных по принципу, показанному на рисунке 1б-и.

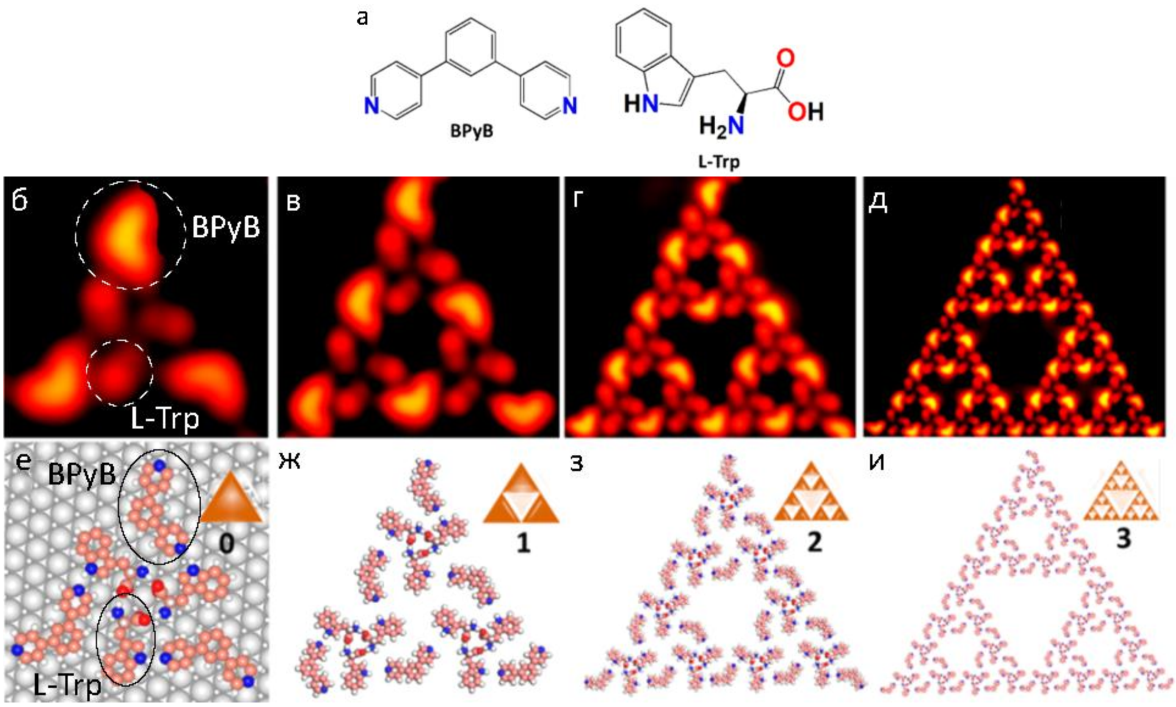


Рис. 1. а) Два молекулярных «кирпичика» (BPyB и L-Trp), из которых построены иерархические наноструктуры. На рис. б) и е) они выделены рамками.
б) – д) Изображения $\mathbf{T_n}$ *(**n** = 0, 1, 2 и 3), полученные при помощи сканирующей туннельной микроскопии.*
е) – и) Схематичные изображения этих $\mathbf{T_n}$*.*

1. Для каждого треугольника Серпинского на рис. 1, определите число молекул $\mathbf{N_{BPyB}}$ и $\mathbf{N_{L\text{-}Trp}}$ в нем. **(2 балла)**

2. Выведите общую зависимость $\mathbf{N_{BPyB}}$ и $\mathbf{N_{L\text{-}Trp}}$ в треугольнике Серпинского $\mathbf{T_n}$ от номера его поколения **n**. **(4 балла)**

3. Рассчитайте соотношение компонентов $\mathbf{N_{L\text{-}Trp}}:\mathbf{N_{BPyB}}$ для

   а) $\mathbf{T_0}$, $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$; **(1,5 балла)**

   б) бесконечно большого треугольника Серпинского. **(2,5 балла)**

4. Найдите **n** для треугольника, состоящего суммарно из 1095 молекул. **(4 балла)**

5. Оцените размер треугольника **D (3 балла)**, состоящего суммарно из 1095 молекул, а также размер его центральной полости **d (3 балла)**, если длина ребра $\mathbf{T_0}$ составляет **a** = 2 нм. Размером треугольника считать диаметр описанной вокруг него окружности, размером полости – диаметр вписанной в нее окружности.

Дополнительные материалы

Теорема Эйлера для выпуклого многогранника:

$$\mathbf{V} - \mathbf{E} + \mathbf{F} = 2,$$

где **V**, **E**, **F** – это, соответственно, число вершин, ребер и граней многогранника.

При расчетах **π** считать равным 3,1.

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4,\ \sqrt{3} \approx 1{,}7,\ \sqrt{5} \approx 2{,}2,\ \sqrt{7} \approx 2{,}6,\ \sqrt{11} \approx 3{,}3,\ \sqrt{13} \approx 3{,}6,\ \sqrt{17} \approx 4{,}1,\ \sqrt{19} \approx 4{,}4.$$

$$\sqrt[3]{2} \approx 1{,}26,\ \sqrt[3]{3} \approx 1{,}44,\ \sqrt[3]{5} \approx 1{,}71,\ \sqrt[3]{7} \approx 1{,}91,\ \sqrt[3]{11} \approx 2{,}22.$$

$$\lg 2 = 0{,}30,\ \lg 3 = 0{,}48,\ \lg 5 = 0{,}70,\ \lg 7 = 0{,}85.$$

Сумма квадратов последовательности натуральных чисел 1, 2, …, **n**:

$$\sum_{m=1}^{n} m^2 = \mathbf{n}(\mathbf{n} + 1)(2\mathbf{n} + 1)/6.$$