Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 9. Поиск простейших ПМК с шестиугольными и треугольными гранями

1. Исходя из двух условий: в каждой вершине многогранника сходятся не менее трех ребер и каждая вершина имеет не более пяти соседей (шесть соседей дают плоское окружение), следует, что возможны два типа вершин:
   - в вершине сходятся 3 ребра: 3 соседа (три треугольника), 4 соседа (два треугольника и шестиугольник), 5 соседей (треугольник и два шестиугольника);
   - в вершине сходятся 4 ребра: 4 соседа (четыре треугольника), 5 соседей (три треугольника и шестиугольник).
2.
   а) Для **y** = 3:

   Выразим число вершин через число граней (каждая треугольная (шестиугольная) грань дает 3 (6) вершин, но каждая вершина принадлежит трем граням):

$$\mathbf{V} = 3/3\mathbf{F}_3 + 6/3\mathbf{F}_6 = \mathbf{F}_3 + 2\mathbf{F}_6$$

   Выразим число ребер через число граней (каждая треугольная (шестиугольная) грань дает 3 (6) ребер, но каждое ребро принадлежит двум граням):

$$\mathbf{E} = 3/2\mathbf{F}_3 + 6/2\mathbf{F}_6 = 1{,}5\mathbf{F}_3 + 3\mathbf{F}_6$$

   Запишем теорему Эйлера:

$$\mathbf{F}_3 + 2\mathbf{F}_6 – 1{,}5\mathbf{F}_3 – 3\mathbf{F}_6 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_6 = 2$$

   Преобразуя, получаем:

$$0{,}5\mathbf{F}_3 = 2$$

   То есть, число треугольников <u>$\mathbf{F}_3$ = 4 - фиксировано, $\mathbf{F}_6$ может быть любым.</u>

   б) Аналогично, для **y** = 4 (в каждой вершине сходится по 4 ребра):

$$\mathbf{V} = 3/4\mathbf{F}_3 + 6/4\mathbf{F}_6 = 0{,}75\mathbf{F}_3 + 1{,}5\mathbf{F}_6$$

$$\mathbf{E} = 3/2\mathbf{F}_3 + 6/2\mathbf{F}_6 = 1{,}5\mathbf{F}_3 + 3\mathbf{F}_6$$

   Запишем теорему Эйлера:

$$0{,}75\mathbf{F}_3 + 1{,}5\mathbf{F}_6 – 1{,}5\mathbf{F}_3 – 3\mathbf{F}_6 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_6 = 2$$

   Преобразуя, получаем:

$$0{,}25\mathbf{F}_3 – 0{,}5\mathbf{F}_6 = 2$$

   Следовательно, количества треугольников шестиугольников связаны как

$$\mathbf{F}_3 = 2\mathbf{F}_6 + 8.$$

Поскольку теорема Эйлера ничего не говорит о существовании многогранника, то, чтобы найти многогранник **Xy** с минимальным числом вершин, для каждого **y** проварьируем число шестиугольников и проверим возможность построения каждого из получаемых многогранников в виде ПМК без искажения треугольных и шестиугольных граней.

а) Для $\mathbf{y} = 3$:

$\mathbf{F}_3 = 4$

$\mathbf{F}_6 = 1$, $\mathbf{V} = 6$, $\mathbf{E} = 9$ – многогранник не существует, поскольку все 6 вершин и 6 из 9 ребер уже принадлежат шестиугольнику, а еще где-то необходимо разместить 4 треугольных грани и 3 не принадлежащих шестиугольнику ребра.

$\mathbf{F}_6 = 2$, $\mathbf{V} = 8$, $\mathbf{E} = 12$ – из развертки, отвечающей данному набору ($\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_6$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{E}$) и представленной на рис. 1, можно «склеить» только выпуклый многогранник, грани которого представляют собой правильные треугольники и трапеции (половинки правильных шестиугольников). То есть, удовлетворяющий условию многогранник не существует.

$\mathbf{F}_6 = 3$, $\mathbf{V} = 10$, $\mathbf{E} = 15$ – из развертки, отвечающей данному набору ($\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_6$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{E}$) и представленной на рис. 2, можно «склеить» только выпуклый многогранник, грани которого представляют собой не только правильные, но и равнобедренные треугольники, а также прямоугольники, сформированные при отрезании от правильных шестиугольников равнобедренных треугольников по малым диагоналям. То есть, удовлетворяющий условию многогранник не существует.

$\underline{\mathbf{F}_6 = 4, \mathbf{V} = 12, \mathbf{E} = 18}$. $\mathbf{X}_3$ – усеченный тетраэдр. См. рис. 3.

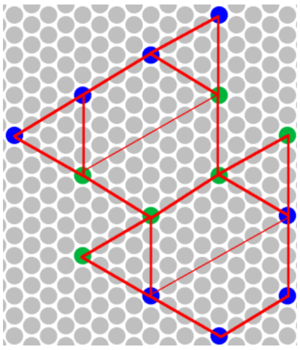

Рис. 1.

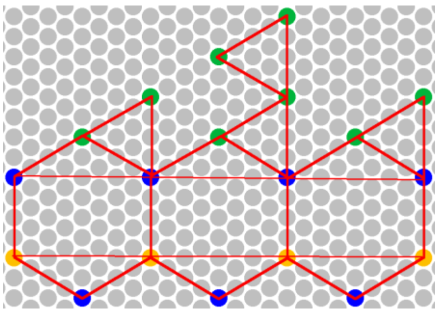

Рис. 2.

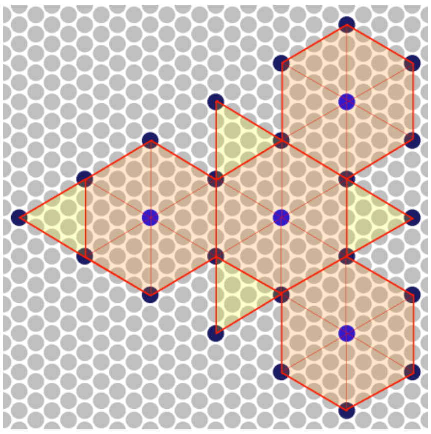

Рис. 3.

б) Для $\mathbf{y} = 4$:

$\mathbf{F}_6 = 1$, $\mathbf{F}_3 = 10$, $\mathbf{V} = 9$, $\mathbf{E} = 18$ – из развертки, отвечающей данному набору ($\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_6$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{E}$) и представленной на рис. 4, невозможно «склеить» многогранник с 9-ю вершинами, в каждой из которых по сходятся по 4 ребра (только сочетание из 3, 4 и 5 ребер в вершинах). Кроме того, данную развертку невозможно «склеить» без искажения либо формы треугольников, либо планарности шестиугольника. То есть, удовлетворяющий условию многогранник не существует.

$\underline{\mathbf{F}_6 = 2, \mathbf{F}_3 = 12, \mathbf{V} = 12, \mathbf{E} = 24}$. $\mathbf{X}_4$ – шестиугольная антипризма. См. рис. 5.

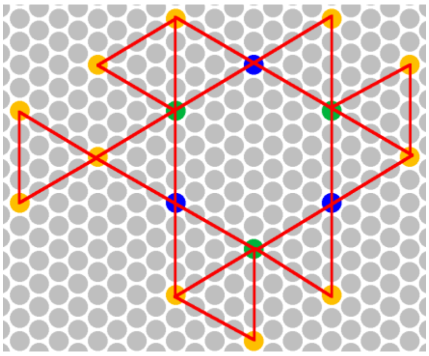

Рис. 4.

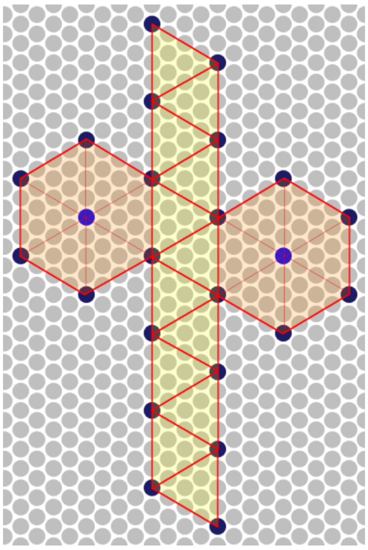

Рис. 5.

3. Представим всю поверхность ПМК как совокупность равносторонних треугольников, то есть каждую шестиугольную грань условно разобьем на 6 треугольников, сходящихся в одной «псевдовершине». Тогда суммарное число треугольных и таких «псевдотреугольных» граней будет равно

$$\mathbf{F'} = \mathbf{F_3} + 6\mathbf{F_6},$$

суммарное число ребер и «псевдоребер» равно

$$\mathbf{E'} = \mathbf{E} + 6\mathbf{F_6} = 1{,}5\mathbf{F}_3 + 3\mathbf{F}_6 + 6\mathbf{F_6} = 1{,}5(\mathbf{F_3} + 6\mathbf{F_6}) = 1{,}5\mathbf{F'},$$

а суммарное число вершин и «псевдовершин» (из теоремы Эйлера для выпуклых многогранников) составляет

$$\mathbf{V'} = 2 - \mathbf{F'} + \mathbf{E'} = 0{,}5\mathbf{F'} + 2.$$

Если на одно ребро треугольной грани ПМК приходится **n** атомов металла, то на одну треугольную грань приходится

$$0{,}5\mathbf{n}(\mathbf{n} + 1) \text{ атомов.}$$

Тогда общее число атомов в ПМК можно будет записать как число атомов в **F’** гранях минус число атомов в **E’** ребрах плюс число атомов в **V’** вершинах

$$\mathbf{N}(\mathbf{n}) = 0{,}5\mathbf{F'n}(\mathbf{n} + 1) - 1{,}5\mathbf{F'n} + 0{,}5\mathbf{F'} + 2,$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{n}) = 0{,}5\mathbf{F'n}^2 - \mathbf{F'n} + 0{,}5\mathbf{F'} + 2.$$

а) Тогда для $\mathbf{X}_3$ – усеченного тетраэдра

$$\mathbf{F'} = \mathbf{F_3} + 6\mathbf{F_6} = 4 + 6\cdot 4 = 28,$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{n}) = 14\mathbf{n}^2 - 28\mathbf{n} + 16,$$

$$\mathbf{N}(2) = 16.$$

б) Для $\mathbf{X}_4$ – шестиугольной антипризмы

$$\mathbf{F'} = \mathbf{F_3} + 6\mathbf{F_6} = 12 + 2\cdot 6 = 24,$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{n}) = 12\mathbf{n}^2 - 24\mathbf{n} + 14,$$

$$\mathbf{N}(2) = 14.$$