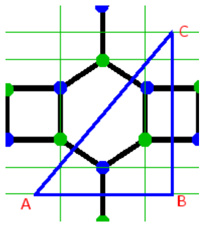
Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 4. Каркасные молекулы нитрида бора

1.



Для вычисления длины единичного отрезка, равной длине стороны базового ромба, рассмотрим Δ**ABC**, отвечающий одной четверти этого ромба (на примере варианта II). Вершины этого треугольника лежат в центрах восьмиугольников.

Здесь ∠**ABC** = 90°, поскольку стороны **AB** и **BC** параллельны взаимно перпендикулярным сторонам квадрата сетки B_xN_x.

При этом

$$\mathbf{AB} = 0{,}5a+\sqrt{3}a+0{,}5a$$

(две половинки ребра BN и малая диагональ правильного шестиугольника),

$$\mathbf{BC} = 0{,}5a+2a+0{,}5a$$

(две половинки ребра BN и большая диагональ правильного шестиугольника).

Длину стороны **AC**, равную **L**, можно найти, используя теорему Пифагора для Δ**ABC**:

$$\mathbf{L} = \mathbf{AC} = \sqrt{AB^2+BC^2} = \sqrt{\left(0{,}5a+\sqrt{3}\cdot a+0{,}5a\right)^2 + \left(0{,}5a+2a+0{,}5a\right)^2}$$

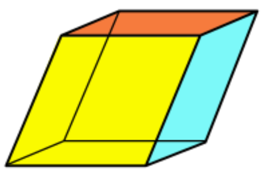
$$\mathbf{L} = \sqrt{\left(\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot a\right)^2 + 3a^2} = a\sqrt{13+2\sqrt{3}}$$

Углы между сторонами ромба равны удвоенным ∠**BAC** и ∠**ACB**:

$$\boldsymbol{\alpha} = 2\arcsin\left(\frac{BC}{AC}\right) = 2\arcsin\left(\frac{3a}{a\sqrt{13+2\sqrt{3}}}\right) = 95{,}35°,$$

$$\boldsymbol{\beta} = 2(90° - \boldsymbol{\alpha}/2) = 180° - \boldsymbol{\alpha} = 180° - 95{,}35° = 84{,}65°.$$

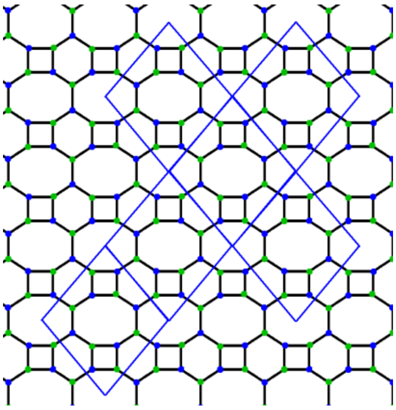
2. Многогранником, составленным из ромбов, является ромбоэдр (фигура из шести ромбов, сходящихся в каждой вершине по 3).



В двумерной сетке, формирующей лист B_xN_x, базовые ромбы сходятся в узлах по 4. Следовательно, чтобы сформировать двумерную «выкройку» трехмерного ромбоэдра, нам надо «убрать» из каждого узла один ромб. При этом только базовый ромб II при склейке «выкройки» может образовывать в ее «вершинах» многоугольники, составленные из ребер, соединяющих разнородные атомы.

«Выкройка», построенная на основе базового ромба I, подразумевает «склейку» фрагментов разнородных атомов, а базовый ромб III формирует каркас с пятиугольниками, в которых неизбежно будут соседствовать однородные атомы.

3.



Общее число:

- квадратов B_2N_2 (на один базовый ромб приходится два квадрата)

$$\mathbf{F_4} = 2\cdot6 = 12,$$

- восьмиугольников B_4N_4 (на один базовый ромб приходится один восьмиугольник)

$$\mathbf{F_8} = 1\cdot6 = 6,$$

- шестиугольников B_3N_3 (по одному шестиугольнику приходится как на каждое ребро ромбоэдра, так и на каждую вершину, образовавшуюся при «склейке» трех базовых ромбов)

$$\mathbf{F_6} = 1\cdot12 \text{ (число ребер ромбоэдра)} + 1\cdot8 \text{ (число вершин ромбоэдра)} = 20,$$

- вершин (суммарное число атомов B и N в каркасе)(на один базовый ромб приходится 6 атомов B и 6 атомов N)

$$\mathbf{V} = (6 + 6)\cdot6 = 72,$$

- ребер BN (на один базовый ромб приходится 14 целых ребер BN и 8 половинок ребер BN)

$$\mathbf{E} = (14 + 8\cdot0{,}5)\cdot6 = 108$$

или $\mathbf{E} = 3/2\cdot72 = 108$

(в каждой вершине сходится по три ребра, каждое ребро принадлежит двум вершинам).

Следовательно,

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}/2 = 36.$$

4. Увеличение длины ребра ромбоэдра в **n** раз ведет к увеличению числа базовых ромбов, приходящихся на одну грань ромбоэдра, (а, следовательно, и числа вершин) в $\mathbf{n}^2$ раз. Тогда:

$$\mathbf{x} = 36\mathbf{n}^2.$$