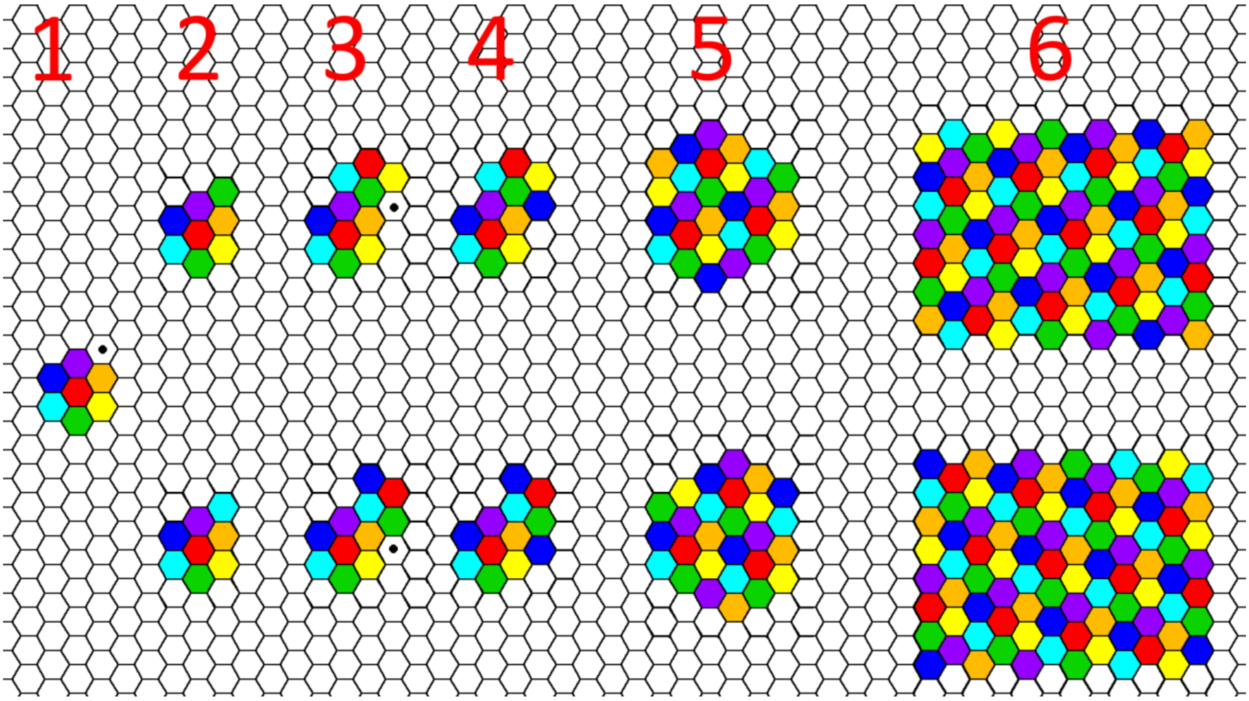
Математика для школьников 7 – 11 класса (отборочный этап)
Решение задачи 2. Графеновая радуга

1. Рассмотрим возможные способы раскраски, пошагово заполняя цветными шестиугольниками пространство вокруг уже известной «ромашки».



Шаг 1) Рассмотрим шестиугольник, отмеченный точкой. Он не может быть окрашен ни фиолетовым, ни оранжевым цветом, иначе мы получим два одинаково окрашенных шестиугольника рядом. Он также не может быть окрашен красным, поскольку это приведет к появлению двух красных шестиугольников в окружении фиолетового/оранжевого шестиугольников. Он не может быть окрашен в желтый (синий) цвет, поскольку это также приведет к нарушению условия семи разных цветов для «ромашки» с центром в фиолетовом (оранжевом) шестиугольнике.

Шаг 2) Следовательно, для этого шестиугольника возможны два варианта окраски: вариант I – зеленый (вверху) и вариант II – голубой (внизу). Далее будем указывать только номер варианта, для которого выбираем тот или иной цвет.

Шаг 3) Поскольку нам известно, как именно относительно I зеленого (II голубого) шестиугольника расположен красный шестиугольник, отметим его, а также еще пару известных цветов-соседей для каждого из случаев. При этом возникает шестиугольник (отмечен точкой), который оказывается единственным незакрашенным в «ромашке» с I зеленым (II оранжевым) центром.

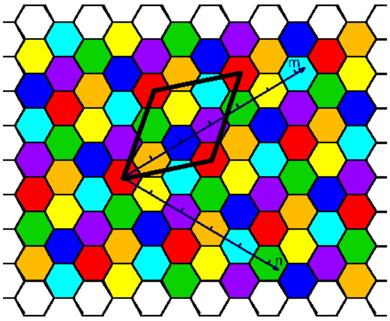
Шаг 4) И в первом, и во втором варианте до полного набора в «ромашке» не хватает синего цвета.

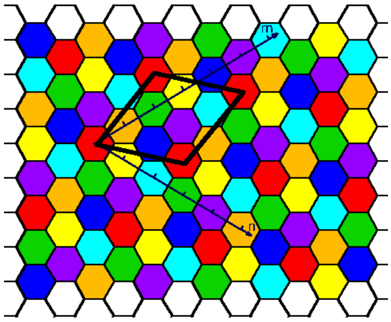
Шаги 5 и 6) Чередуя заполнение окружения красных шестиугольников по заданному шаблону с закрашиванием «последних» шестиугольников в некоторых «ромашках» (то есть, выполняя условие, что любая «ромашка» содержит строго 7 цветов), расширяем закрашенную область.

Таким образом, можно получить всего два не совпадающих друг с другом способа раскраски.

2. Оба способа раскраски являются периодическими. И в первом, и во втором способе раскраски минимальной повторяющейся областью является ромб, вершины которого лежат в серединах ближайших шестиугольников одного и того же цвета. Чтобы однозначно его задать, необходимо определить длину и положение на сетке шестиугольников одного из его ребер.

   Поместим начало косоугольной системы координат в одну из вершин ромба и расположим оси так, чтобы координаты, задающие «однотипные» стороны ромбов обеих раскрасок, были неотрицательными. Тогда (**n**, **m**) составляют (1,2) для первого случая и (2,1) для второго:





3. Как можно видеть, одному и тому же способу раскраски листа из правильных шестиугольников отвечают 7 разных «ромашек», по числу цветов раскраски, отвечающих центру группы. То есть, для однозначности выбора способа раскраски необходимо, во-первых, зафиксировать цвет центрального шестиугольника в «ромашке», а, во-вторых, задать индексы взаимного расположения центров двух «ромашек» друг относительно друга ((1,2) либо (2,1)).

   Число уникальных способов раскраски «ромашки» с фиксированным цветом центрального шестиугольника (скажем, красного) равно числу не совпадающих при повороте вокруг центра способов раскраски кольца из шести элементов в шесть разных цветов.

   Одному и тому же способу раскраски кольца из шести элементов отвечают шесть разных колец, по числу позиций, отличающихся лишь поворотом кольца вокруг центра «ромашки». То есть, для однозначности выбора способа раскраски кольца необходимо зафиксировать цвет одного из его шестиугольников, например, верхнего (скажем, фиолетовый). Тогда цвет второго шестиугольника в кольце можно выбрать пятью способами, третьего – четырьмя, четвертого – тремя, пятого – двумя, а последнего – одним способом.

   То есть, всего существует <u>5! = 120</u> не совпадающих при повороте вокруг центра способов раскраски кольца из шести элементов в шесть разных цветов.

   То есть, общее число уникальных способов, которыми можно раскрасить графеновую плоскость во все цвета радуги так, чтобы любой произвольно выбранный на ней фрагмент в форме «ромашки» был окрашен в 7 разных цветов, равно

$$120 \cdot 2 = 240.$$