Математика для школьников 7 – 11 класса (заключительный этап)
Простые задачи. Решения

Решение задачи 1. Библиотека в кармане (10 баллов)

1. Площадь микросхемы карты памяти составляет половину от площади ее корпуса:

$$\mathbf{S} = 0{,}5\cdot10\cdot10^{-3}\cdot15\cdot10^{-3} = 7{,}5\cdot10^{-5}\text{ м}^2,$$
$$\mathbf{S} = 7{,}5\cdot10^{13}\text{ нм}^2.$$

Поскольку объем карты памяти составляет 1 Терабайт = 8 Терабит и запись ведется в 100 слоев (то есть, площадь, занимаемая информацией, в 100 раз больше площади микросхемы), то на один бит карты памяти приходится:

$$\mathbf{S_1} = 100\cdot7{,}5\cdot10^{13}/(1{,}1\cdot10^{12})/8 = 8{,}52\cdot10^{-16}\text{ м}^2 \approx 850\text{ нм}^2.$$

2. Емкость карты памяти должна увеличиться в

$$4{,}50\cdot10^{15}/1{,}1\cdot10^{12} = 4096\text{ раз.}$$

Поскольку, по закону Мура, емкость карты памяти должна удваиваться каждые два года, то увеличение в 4096 раз произойдет через

$$\mathbf{t} = 2\cdot\log_2(4096) = 2\cdot12 = 24\text{ года}$$

после представления карты памяти объемом 1 Тб в 2019 году, то есть, в 2043 году.

(Или: нужно 4096 делить на 2 до тех пор, пока остаток от деления будет больше или сравним с единицей, всего удваивание происходит 12 раз.)

Решение задачи 2. Изучаем дендример (10 баллов)

1. Общее число мономерных звеньев (без учета центрального звена) в дендримере с коэффициентом ветвления, равным 2, и **n** поколениями ветвления можно записать как сумму геометрической прогрессии, в которой первый член ряда равен 3, а знаменатель равен 2:

$$\mathbf{S'} = 3 + 3\cdot2 + \ldots + 3\cdot2^{n-1} = 3\sum_1^n 2^{m-1} = \frac{3(2^n-1)}{2-1} = 3\cdot2^n - 3.$$

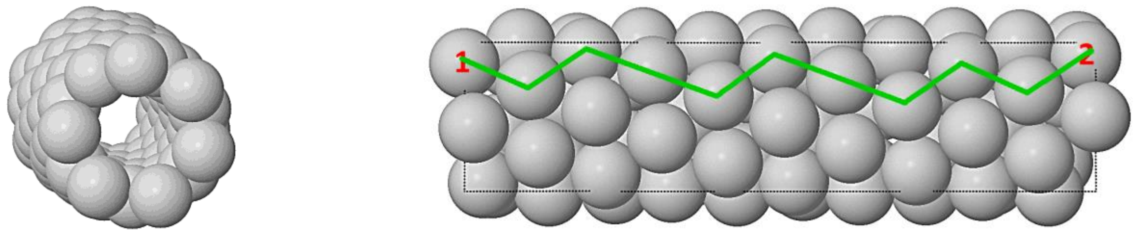
Или, учитывая центральное звено: $\mathbf{S} = \mathbf{S'} + 1 = 3\cdot2^n - 2$.

То есть, по условию, $\mathbf{S} = 3\cdot2^n - 2 = 94$.

Тогда число поколений ветвления равно
$$\mathbf{n} = \log_2\left(\frac{S+2}{3}\right) = \log_2\left(\frac{96}{3}\right) = \log_2(32) = 5.$$

2. Радиус молекулы дендримера составляет $\mathbf{R} \approx \mathbf{nL}$, а диаметр $\mathbf{D} = 2\mathbf{nL} = 2\cdot5\cdot1{,}5 = 15$ нм.

Решение задачи 3. Металлическая спираль (10 баллов)



а *б*

По виду трубки с торца видим, что каждый виток имеет длину более 6, но менее 7 межатомных расстояний. Таким образом, если взять произвольный атом в цепочке и два его ближайших соседа на соседнем витке спирали, то до соседа, расположенного на рис. б «сверху» будет 6 межатомных расстояний по цепочке, а до соседа «снизу» – 7.

Будем идти из атома **1** по центрам ближайших атомов соседних витков, смещаясь «вверх» или «вниз», и соответственно засчитывая 6 или 7 межатомных расстояний, пока не окажемся на атоме **2**. В итоге суммарно получим 7 + 6 + 7 + 7 + 6 + 7 + 7 + 6 + 7 + 6 = 66 межатомных расстояний для пути, отмеченного на рисунке.

Поскольку в цепочке атомов на одно межатомное расстояние приходится 1 атом, и по рисунку атомы **1** и **2** разделяет 10 полных (поскольку атомы связаны параллельным переносом вдоль оси спирали) витков спирали, то число атомов **x**, приходящееся на виток спирали, составит 66/10 = **6,6**.

Цепочка от атома **1** до атома **2** содержит 66 межатомных расстояний и состоит из 66 + 1 = 67 атомов. Общее число атомов в трубке, согласно рисунку, на один атом больше и составляет **n** = **68** атомов.

Решение задачи 4. Полипептид (10 баллов)

Число вариантов структуры полипептида (**N**), составленного из семи аминокислотных остатков (а/о) глицина, и трех а/о, являющихся лейцином (**Л**) и/или аланином (**А**), равно сумме вариантов размещения 3 а/о в цепочке длиной 7 + 3 = 10 а/о для четырех возможных комбинаций **Л** и **А**:

3**Л** + 0**А**, 2**Л** +1**А**, 1**Л** + 2**А** и 0**Л** + 3**А**,

$$\mathrm{N} = \mathrm{N}_{3Л} + \mathrm{N}_{2Л+А} + \mathrm{N}_{2А+Л} + \mathrm{N}_{3А}.$$

Рассчитаем **N** для каждой из комбинаций **Л** и **А**. Число вариантов размещения 3 а/о одного типа относительно 7 а/о другого типа в цепочке длиной 10 а/о составляет:

$$N_{3Л+0А} = N_{0Л+3А} = \mathrm{C}_{10}^{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{6} = 4\cdot 3\cdot 10 = 120.$$

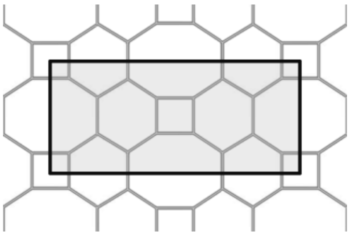
Число вариантов размещения 1 а/о одного типа и 2 а/о второго типа относительно 7 а/о третьего типа в цепочке длиной 10 а/о составляет:

$$N_{2Л+1А} = N_{1Л+2А} = \mathrm{C}_{10}^{1}\cdot C_{9}^{2} = 10\frac{9!}{2!7!} = 10\frac{9\cdot 8}{2} = 360.$$

Тогда общее число вариантов структуры полипептида равно

$$\text{N}=2 \cdot N_{3Л} + 2 \cdot N_{2Л+А} = 2 \cdot 120 + 2 \cdot 360 = 960.$$

Решение задачи 5. Двумерные ячейки (10 баллов)



1. На ячейку приходятся:

   - <u>16</u> вершин (**V**),
   - 12·0,5 + 18 = <u>24</u> ребра (**E**),
   - 4·0,25 + 1 = 2 квадрата,
   - 4·0,5 + 2 = 4 шестиугольника,
   - 4·0,5 = 2 восьмиугольника,
   - то есть, всего 2 + 4 + 2 = <u>8</u> многоугольников (**F**).

   Тогда значение **k** для периодических двумерных структур равно

   $$\mathbf{k} = 16 - 24 + 8 = 0.$$

2. Общее число граней, приходящееся на ячейку периодической двумерной структуры:

   $$\mathbf{F} = \mathbf{F_5} + \mathbf{F_6} + \mathbf{F_7}.$$

   Общее число ребер, приходящееся на ячейку:

   $$\mathbf{E} = 1/2\cdot(5\mathbf{F_5} + 6\mathbf{F_6} + 7\mathbf{F_7}).$$

   Общее число вершин, приходящееся на ячейку:

   $$\mathbf{V} = 1/3\cdot(5\mathbf{F_5} + 6\mathbf{F_6} + 7\mathbf{F_7}).$$

   Тогда, подставляя полученные выражения и **k** = 0 в формулу **V** – **E** + **F** = **k** для ячейки, получаем:

   $$1/3\cdot(5\mathbf{F_5} + 6\mathbf{F_6} + 7\mathbf{F_7}) - 1/2\cdot(5\mathbf{F_5} + 6\mathbf{F_6} + 7\mathbf{F_7}) + \mathbf{F_5} + \mathbf{F_6} + \mathbf{F_7} = 0$$

   Следовательно, общее уравнение, связывающее число многоугольников разного типа, приходящееся на ячейку, это:

   $$\mathbf{F_5} - \mathbf{F_7} = 0$$
   $$\mathbf{F_5} = \mathbf{F_7}$$

   (то есть, число шестиугольников может быть любым, а число пятиугольников равно числу семиугольников).

   Если $\mathbf{F_6}$ = 6 и $\mathbf{F_5}$ = 2, то $\mathbf{F_7} = \mathbf{F_5}$ = 2.