Математика для школьников 7 – 11 класса (заключительный этап)
Вариант IV. Решения

Решение задачи 1. Многогранность диатомовых водорослей (8 баллов)

1. Запишем теорему Эйлера для рассматриваемого многогранника:

$$\mathbf{V} = 5\mathbf{F}_5/3 + 6\mathbf{F}_6/3 + 7\mathbf{F}_7/3 = 972$$

(каждый **n**-угольник дает **n** вершин, но каждая вершина принадлежит трем многоугольникам),

$$\mathbf{E} = 5\mathbf{F}_5/2 + 6\mathbf{F}_6/2 + 7\mathbf{F}_7/2$$

(каждый **n**-угольник дает **n** ребер, но каждое ребро принадлежит двум многоугольникам),

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6 + \mathbf{F}_7.$$

Тогда

$$5\mathbf{F}_5/3 + 6\mathbf{F}_6/3 + 7\mathbf{F}_7/3 - (5\mathbf{F}_5/2 + 6\mathbf{F}_6/2 + 7\mathbf{F}_7/2) + \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6 + \mathbf{F}_7 = 2$$

$$\mathbf{F}_5 - \mathbf{F}_7 = 12$$

Рассчитаем число граней разных типов:

$$\mathbf{F}_7 = 122$$

$$\mathbf{F}_5 = 12 + \mathbf{F}_7 = 12 + 122 = 134$$

$$\mathbf{F}_6 = 0{,}5(\mathbf{V} - 5\mathbf{F}_5/3 - 7\mathbf{F}_7/3) = 0{,}5(972 - 5\cdot(12 + 122)/3 - 7\cdot122/3) = 232$$

2. Площадь поверхности многогранника равна сумме площадей составляющих его многоугольников, помноженных на общее число многоугольников каждого вида:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}_5\cdot\mathbf{S}_5 + \mathbf{F}_6\cdot\mathbf{S}_6 + \mathbf{F}_7\cdot\mathbf{S}_7.$$

Площадь любого равностороннего многоугольника можно приблизить суммой площадей равносторонних треугольников

$$\mathbf{S}_3 = 0{,}5\mathbf{d}^2\sin60° = \mathbf{d}^2\sqrt{3}/4:$$

$$\mathbf{S} = 5\mathbf{F}_5\cdot\mathbf{S}_3 + 6\mathbf{F}_6\cdot\mathbf{S}_3 + 7\mathbf{F}_7\cdot\mathbf{S}_3$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_3(5(12 + \mathbf{F}_7) + 6\mathbf{F}_6 + 7\mathbf{F}_7)$$

$$\mathbf{S} = 6\mathbf{S}_3(10 + 2\mathbf{F}_7 + \mathbf{F}_6)$$

$$\mathbf{S} = 6\mathbf{S}_3(10 + 2\cdot122 + 232)$$

$$\mathbf{S} = 2916\mathbf{S}_3$$

$$\mathbf{S} = 2916\mathbf{d}^2\sqrt{3}/4 = 1239{,}3 \text{ мкм}^2$$

Чтобы оценить диаметр «панциря», приравняем рассчитанную ранее величину площади поверхности к площади поверхности сферы:

$$\mathbf{S} = \pi\mathbf{D}^2.$$

Тогда диаметр этой сферы равен

$$\mathbf{D} = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{1239{,}3}{3{,}1}} = 20 \text{ мкм}$$

Решение задачи 2. Палиндром (8 баллов)

1. Рассчитаем вероятность того, что последовательность длиной **x** нуклеотидов является ДНК-палиндромом:

- всего возможно 4^x вариантов последовательностей нуклеотидов;
- поскольку, чтобы задать ДНК-палиндром, достаточно задать его первую половину (вторая половина однозначно следует из первой по правилам комплементарности, то есть, ее вероятность равна единице), то всего возможно $4^{x/2}$ вариантов палиндромов;
- тогда вероятность палиндрома длиной **x** составляет

$$\mathbf{P} = \frac{4^{x/2}}{4^x} = \frac{1}{4^{x/2}}.$$

Следовательно, зная величину **P** = 1/4096, мы можем рассчитать значение **x**:

$$\mathbf{x} = 2\log_4(1/\mathbf{P}) = 2\log_4 4096 = \log_2 4096 = 12.$$

2. Рассчитаем вероятность того, что случайная последовательность длиной (2**b** + 4 + 2) нуклеотидов является частичным ДНК-палиндромом, «ножка» которого имеет длину, точно равную **b** нуклеотидов, а «петля» – 4 нуклеотида:

- для **b** = 6 нуклеотидов всего возможно 4^{18} вариантов последовательностей;
- «ножку» длиной 6 нуклеотидов можно получить 4^6 способами;
- 4 из 4^2 вариантов концевых нуклеотидов последовательности длиной $2\cdot6 + 6 = 18$ нуклеотидов отвечают случаю частичного ДНК-палиндрома с «ножкой» длиной $6 + 1 = 7$ нуклеотидов, следовательно, остальные 12 отвечают частичному ДНК-палиндрому с «ножкой» длиной 6 нуклеотидов;
- 4^3 из 4^4 вариантов последовательности 4 нуклеотидов «петли» отвечают частичному ДНК-палиндрому с «ножкой» длиной $6 + 1 = 7$ нуклеотидов, следовательно, $3\cdot4^3$ отвечают частичному ДНК-палиндрому с «ножкой» длиной 6 нуклеотидов;

- тогда вероятность составляет

$$\frac{3\cdot4\cdot4^{b}\cdot3\cdot4^{3}}{4^{2b+6}} = \frac{9}{4^{6+2}} = 9\cdot4^{-8} = 1{,}4\cdot10^{-4}.$$

Решение задачи 3. Читая суперпамять (8 баллов)

1. Предположим, что наноструктуры расположены по спирали диаметром **D** = 10 см и шириной витка **A** = 1 мкм. Тогда общее число витков находим, разделив радиус диска на ширину витка:

   $$\mathbf{N} = \mathbf{D}/(2\mathbf{A}) = 0{,}1/(2\cdot10^{-6}) = 0{,}5\cdot10^{5}$$

   В свою очередь, **N** оборотов диск совершит за время

   $$\mathbf{t} = \mathbf{N}/1000 = 0{,}5\cdot10^{5}/1000 = 50 \text{ мин}$$

2. Один оборот диск совершает за 1/1000 минут. Максимальное количество информации содержится во внешнем витке, следовательно, поскольку все витки считываются за одинаковое время, при его чтении будет достигнута максимальная скорость.

   Длина внешнего витка составляет **π**(**D** – **A**), а общее число наноструктур в этом витке равно **π**(**D** – **A**)/**A**. Тогда объем информации, который можно считать при его прохождении, составляет

   $$\mathbf{I_1} = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{D} - \mathbf{A})/\mathbf{A}\cdot8 = 3{,}1(0{,}1 - 10^{-6})/10^{-6}\cdot8 = 2479975{,}2 \text{ бит.}$$

   Что отвечает скорости чтения

   $$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{I_1}\cdot1000 = 309996{,}9\cdot8\cdot1000 \text{ бит/мин}$$

   $$\boldsymbol{\tau} = 309996{,}9\cdot8\cdot1000/(8\cdot60) \text{ байт/сек}$$

   $$\boldsymbol{\tau} = 5166615 \text{ байт/сек}$$

3. Найдем длину спирали **L**, рассчитав ее площадь двумя способами – как площадь круга диаметром **D** и как площадь прямоугольника длиной **L** и шириной **A**:

   $$\boldsymbol{\pi}\mathbf{D}^{2}/4 = \mathbf{LA}$$

   $$\mathbf{L} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{D}^{2}/(4\mathbf{A})$$

   Рассчитаем общее число наноструктур для диска:

   $$\mathbf{M} = \mathbf{L}/\mathbf{A} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{D}^{2}/(4\mathbf{A}^{2}) = 3{,}1\cdot0{,}1^{2}/(4\cdot10^{-6\cdot2}) = 0{,}775\cdot10^{10}$$

   Тогда объем записанной информации

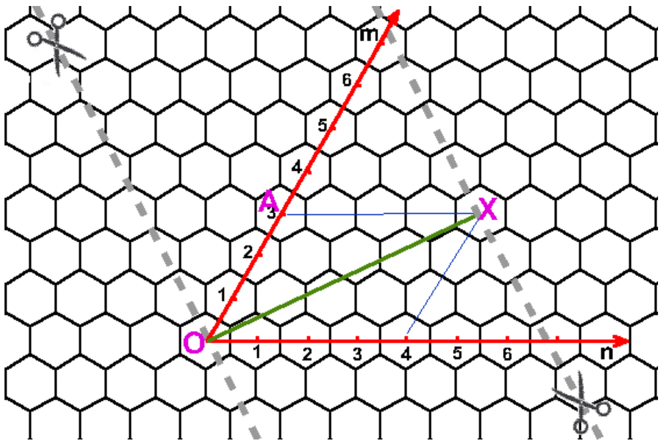
   $$\mathbf{I} = \mathbf{M}\cdot8 = 0{,}775\cdot10^{10}\cdot8 = 6{,}2\cdot10^{10} \text{ бит} = 0{,}775\cdot10^{10} \text{ байт}$$

Решение задачи 4. Перегруппировка нанотрубки (8 баллов)

Поскольку общее число атомов, а, следовательно, и шестиугольников неизменно, то площадь боковой поверхности УНТ не меняется:

$$\mathbf{P_1L_1 = P_2L_2},$$

где **P** – периметр УНТ, равный длине отрезка **OX**, а **L** – длина УНТ.



Рассчитаем длину **P**, применив теорему косинусов к треугольнику **OAX**:

$$\mathbf{P} = \sqrt{(\sqrt{3}\mathrm{an})^2 + (\sqrt{3}\mathrm{am})^2 - \sqrt{3}\mathrm{an}\cdot\sqrt{3}\mathrm{am}\cdot\cos(120^\circ)} = \sqrt{3}a\sqrt{n^2+\mathrm{nm}+\mathrm{m}^2},$$

где **a** – сторона шестиугольника графеновой сетки (длина связи С–С).

Тогда

$$\mathbf{L_2/L_1 = P_1/P_2} = \frac{\sqrt{3}a\sqrt{n_1^2+\mathrm{n}_1m_1+\mathrm{m}_1^2}}{\sqrt{3}a\sqrt{n_2^2+\mathrm{n}_2m_2+\mathrm{m}_2^2}} = \frac{\sqrt{n_1^2+\mathrm{n}_1m_1+\mathrm{m}_1^2}}{\sqrt{n_2^2+\mathrm{n}_2m_2+\mathrm{m}_2^2}} = \frac{\sqrt{301}}{\sqrt{43}} = \sqrt{7} = 2{,}6.$$

Решение задачи 5. Композитное волокно (8 баллов)

1. Пусть длина отдельного волокна равна **L**, тогда его объем равен

$$\mathbf{V_1 = \pi r_{вол}^2 L}, \qquad (1)$$

а объем одной нити PS, длина которой равна длине всего волокна **L**, –

$$\mathbf{V_2 = \pi r_{PS}^2 L}. \qquad (2)$$

Тогда объемная доля PS в волокне (а, следовательно, и в исходной полимерной массе), составляет

$$\mathbf{\omega = NV_2/V_1 = N\pi r_{PS}^2 L/\pi r_{вол}^2 L = Nr_{PS}^2/r_{вол}^2}, \qquad (3)$$

где **N** – общее число нитей PS в композитном волокне.

В то же время, на площадь поперечного сечения **A** = 5800 нм^2 приходится одна нить PS, тогда общее число нитей PS в композитном волокне составляет

$$\mathbf{N} = \pi \mathbf{r}_{\text{вол}}^2/\mathbf{A}. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получаем

$$\omega = (\pi \mathbf{r}_{\text{вол}}^2/\mathbf{A})\cdot \mathbf{r}_{PS}^2/\mathbf{r}_{\text{вол}}^2 = \pi \mathbf{r}_{PS}^2/\mathbf{A} = 3{,}1\cdot 25^2/5800 = 0{,}33. \qquad (5)$$

В объеме исходной полимерной массы на куб с ребром 2$\mathbf{R}_{PS}$ + **L** приходится одна капля PS объемом

$$\mathbf{V}_{PS} = 4\pi \mathbf{R}_{PS}^3/3. \qquad (6)$$

В это случае объемная доля PS составляет

$$\omega = \mathbf{V}_{PS}/(2\mathbf{R}_{PS} + \mathbf{L})^3 = 4\pi \mathbf{R}_{PS}^3/3/(2\mathbf{R}_{PS} + \mathbf{L})^3. \qquad (7)$$

Тогда расстояние между каплями PS (с учетом (5)) равно

$$\mathbf{L} = \sqrt[3]{\frac{4\pi R_{PS}^3}{3\omega}} - 2R_{PS} = \left(\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3\omega}} - 2\right) R_{PS} = \left(\sqrt[3]{\frac{4A}{3r_{PS}^2}} - 2\right) R_{PS} = 29{,}1. \qquad (8)$$

Решение задачи 6. Нанокластеры из треугольных слоев (20 баллов)

1. Общее число атомов металла $\mathbf{N_0}$ в плоском треугольном слое равно сумме последовательности первых **n** натуральных чисел:

$$\mathbf{N_0(n)} = \mathbf{T(n)} = \sum_{m=1}^{n} m = \mathbf{n}(\mathbf{n} + 1)/2.$$

2.

а) Общее число атомов в нанокластере в форме равносторонней треугольной призмы, на ребро которой приходится **n** атомов, равно сумме атомов в **n** равносторонних треугольниках, на ребро которых приходится **n** атомов. Число атомов в таком равностороннем треугольнике, в свою очередь, равно сумме последовательности натуральных чисел от 1 до **n**, **T**(**n**):

$$\mathbf{N_{3p}(n)} = \mathbf{nN_0(n)} = \mathbf{n}^2(\mathbf{n} + 1)/2.$$

б) Общее число атомов в нанокластере в форме тетраэдра, на ребро которого приходится **n** атомов, равно сумме атомов в **n** равносторонних треугольниках, на ребра которых приходится от 1 до **n** атомов:

$$\mathbf{N_{td}(n)} = \sum_{m=1}^{n} N_0(m) = \sum_{m=1}^{n} [m\,(m+1)/2] = (\mathbf{n}^3 + 3\mathbf{n}^2 + 2\mathbf{n})/6.$$

в) Удлиненная треугольная бипирамида может быть представлена как сочетание равносторонней треугольной призмы, на ребро которой приходится **n** атомов, и двух тетраэдров, на каждое ребро которых приходится по ($\mathbf{n}$ – 1) атому. Тогда общее число атомов в нанокластере в форме удлиненной треугольной бипирамиды составляет:

$$\mathbf{N_{3bp}}(\mathbf{n}) = \mathbf{N_{3p}}(\mathbf{n}) + 2\mathbf{N_{td}}(\mathbf{n} - 1) = \mathbf{n}^2(\mathbf{n} + 1)/2 + 2\cdot((\mathbf{n} - 1)^3 + 3(\mathbf{n} - 1)^2 + 2(\mathbf{n} - 1))/6 = (5\mathbf{n}^3 + 3\mathbf{n}^2 - 2\mathbf{n})/6.$$

3. Запишем уравнение согласно условию:

$$\mathbf{N_{3p}}(\mathbf{n} + 1) = \mathbf{N_{3bp}}(\mathbf{n})$$

Преобразуя, получаем:

$$(\mathbf{n} + 1)^2(\mathbf{n} + 2)/2 = (5\mathbf{n}^3 + 3\mathbf{n}^2 - 2\mathbf{n})/6$$

$$\mathbf{n}^3 - 9\mathbf{n}^2 - 17\mathbf{n} - 6 = 0$$

Находим корни кубического уравнения:

$$(\mathbf{n} + 1)(\mathbf{n} - 6)(2\mathbf{n} - 1) = 0$$

Условию $\mathbf{n} > 1$ удовлетворяет только один корень, $\mathbf{n} = 6$.

4.

а) Число атомов в поверхностном слое нанокластера в форме равносторонней треугольной призмы, на ребро которой приходится $\mathbf{n}$ атомов, составляет:

$$\mathbf{M_{3pr}}(\mathbf{n}) = 2\mathbf{T}(\mathbf{n}) \text{ (тр. грани)} + 3\mathbf{n}^2 \text{ (кв. грани)} - 9\mathbf{n} \text{ (учет повтора ребер)} + 6 \text{ (вершины)}$$

$$\mathbf{M_{3pr}}(\mathbf{n}) = 2\cdot\mathbf{n}^2(\mathbf{n} + 1)/2 + 3\mathbf{n}^2 - 9\mathbf{n} + 6 = 4\mathbf{n}^2 - 8\mathbf{n} + 6.$$

б) Число атомов в поверхностном слое нанокластера в форме тетраэдра, на ребро которого приходится $\mathbf{n}$ атомов, составляет:

$$\mathbf{M_{td}}(\mathbf{n}) = 4\mathbf{T}(\mathbf{n}) \text{ (тр. грани)} - 6\mathbf{n} \text{ (учет повтора ребер)} + 4 \text{ (вершины)}$$

$$\mathbf{M_{td}}(\mathbf{n}) = 4\cdot\mathbf{n}^2(\mathbf{n} + 1)/2 - 6\mathbf{n} + 4 = 2\mathbf{n}^2 - 4\mathbf{n} + 4.$$

в) Число атомов в поверхностном слое нанокластера в форме удлиненной треугольной бипирамиды, на ребро которой приходится $\mathbf{n}$ атомов, составляет:

$$\mathbf{M_{3bp}}(\mathbf{n}) = 6\mathbf{T}(\mathbf{n}) \text{ (тр. грани)} + 3\mathbf{n}^2 \text{ (кв. грани)} - 15\mathbf{n} \text{ (учет повтора ребер)} + 8 \text{ (вершины)}$$

$$\mathbf{M_{3bp}}(\mathbf{n}) = 6\cdot\mathbf{n}^2(\mathbf{n} + 1)/2 + 3\mathbf{n}^2 - 15\mathbf{n} + 8 = 6\mathbf{n}^2 - 12\mathbf{n} + 8.$$

5. Запишем уравнение согласно условию:

$$2\mathbf{N_{td}}(\mathbf{n}) = \mathbf{M_{3bp}}(\mathbf{n})$$

$$2\cdot(\mathbf{n}^3 + 3\mathbf{n}^2 + 2\mathbf{n})/6 = 6\mathbf{n}^2 - 12\mathbf{n} + 8$$

$$\mathbf{n}^3 - 15\mathbf{n}^2 + 38\mathbf{n} - 24 = 0$$

$$(\mathbf{n} - 1)(\mathbf{n} - 2)(\mathbf{n} - 12) = 0$$

Условию $\mathbf{n} > 1$ удовлетворяют два корня, $\mathbf{n} = 2$ и $\mathbf{n} = 12$.

6.

а) $\mathbf{N_{td}}(12) = 364$, $\mathbf{N_{3bp}}(12) = 1508$. $\mathbf{M_{td}}(12) = 244$, $\mathbf{M_{3bp}}(12) = 728$.

б) Рассмотрим многогранник, вершины которого лежат в центрах атомов, расположенных в вершинах нанокластера с ребром, на которое приходится $\mathbf{n}$ атомов металла. Обозначим длину ребра такого многогранника как $\mathbf{a}$. Тогда $\mathbf{a} = 2\mathbf{r}(\mathbf{n} - 1)$, где $\mathbf{r}$ – радиус атома металла.

Тогда диаметр сферы, ограничивающей нанокластер в форме тетраэдра, равен:

$$\mathbf{D_{td}} = 2\mathbf{R_{td}} + 2\mathbf{r} = 2\cdot\sqrt{6}/4\cdot\mathbf{a} + 2\mathbf{r} = \sqrt{6}\,\mathbf{r}(\mathbf{n} - 1) + 2\mathbf{r}$$

Диаметр сферы, ограничивающей нанокластер в форме равносторонней удлиненной треугольной бипирамиды, в свою очередь, равен сумме высот равносторонней треугольной призмы и двух высот тетраэдров:

$$\mathbf{D_{3bp}} = \mathbf{a} + 2\cdot\sqrt{6}/3\mathbf{a} + 2\mathbf{r} = 2\mathbf{r}(\mathbf{n} - 1) + 2\cdot\sqrt{6}/3\cdot2\mathbf{r}(\mathbf{n} - 1) + 2\mathbf{r} = 2\mathbf{rn} + 4\cdot\sqrt{6}/3\mathbf{r}(\mathbf{n} - 1)$$

Максимальным из найденных значений является $\mathbf{n} = 12$ (12 > 2).

Размер нанокластера в форме тетраэдра составляет:

$$\mathbf{D_{td}} = \sqrt{6}\cdot0{,}144\cdot11 + 2\cdot0{,}144 = 4{,}168 \text{ нм.}$$

Размер нанокластера в форме удлиненной треугольной бипирамиды составляет:

$$\mathbf{D_{3bp}} = 2\cdot0{,}144\cdot12 + 4\cdot\sqrt{6}/3\cdot0{,}144\cdot11 = 8{,}483 \text{ нм.}$$

Решение задачи 7. Рекордный каркас (20 баллов)

1. Запишем теорему Эйлера для выпуклых многогранников:

$$\mathbf{V} - \mathbf{E} + \mathbf{F} = 2,$$

где для многогранника, составленного из треугольников и квадратов, сходящихся в каждой вершине по четыре,

число вершин $\mathbf{V} = 3/4\mathbf{F_3} + 4/4\mathbf{F_4}$,

число ребер $\mathbf{E} = 3/2\mathbf{F_3} + 4/2\mathbf{F_4} = 2\mathbf{V}$,

число граней $\mathbf{F} = \mathbf{F_3} + \mathbf{F_4}$.

Тогда

$$3/4\mathbf{F_3} + 4/4\mathbf{F_4} - 3/2\mathbf{F_3} - 4/2\mathbf{F_4} + \mathbf{F_3} + \mathbf{F_4} = 2$$

$$1/4\mathbf{F_3} = 2$$

$$\mathbf{F_3} = 8$$

Выведем из формулы Эйлера значение **F** и запишем его через параметры (**a**, **b**) для каркаса:

$$\mathbf{F} = 2 - \mathbf{V} + \mathbf{E} = 2 - \mathbf{V} + 2\mathbf{V} = 2 + \mathbf{V}$$

$$\mathbf{F} = 2 + \mathbf{M} = 2 + 6(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)$$

Тогда

$$\mathbf{F_4} = \mathbf{F} - \mathbf{F_3} = 2 + \mathbf{M} - 8 = \mathbf{M} - 6 = 6(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) - 6.$$

а) Самая маленькая МОКС задается коэффициентами (1,0), что соответствует **M** = 6. Число органических «мостиков» в структуре любой МОКС равно числу ребер соответствующего ей многогранника (поскольку в каждой вершине сходится по четыре ребра и каждое из этих ребер приходится на две вершины, то число ребер в два раза превышает число вершин):

$$\mathbf{L} = 2\mathbf{M} = 12,$$

$$\mathbf{F_3} = 8,$$

$$\mathbf{F_4} = \mathbf{M} - 6 = 6 - 6 = 0.$$

Многогранник, имеющий 6 вершин, 12 ребер и 8 треугольных граней, сходящихся в вершинах по 4, – это октаэдр.

б) Для многогранника, в котором все треугольные грани имеют попарно общие вершины, общее число вершин равно **M** = 8·3/2 = 12 (каждая из восьми треугольных граней имеет 3 вершины, но каждая из этих вершин принадлежит одновременно двум треугольным граням). Это отвечает уравнению $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = 2$, которое имеет только одно решение в целых неотрицательных числах, (1,1).

$$\mathbf{L} = 2\mathbf{M} = 24,$$

$$\mathbf{F_3} = 8,$$

$$\mathbf{F_4} = \mathbf{M} - 6 = 12 - 6 = 6.$$

Многогранник, составленный из 8 треугольников и 6 квадратов и имеющий 12 вершин и 24 ребра, сходящихся в вершинах по 4, – это кубооктаэдр.

в) Для многогранника, в котором треугольные грани разделены между собой, общее число вершин равно **M** = 8·3 = 24 (каждая из восьми треугольных граней имеет 3 вершины, треугольники не имеют общих вершин). Это отвечает уравнению $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = 4$, которое (с точностью до перестановки) имеет только одно решение в целых неотрицательных числах, (2,0).

$$\mathbf{L} = 2\mathbf{M} = 48,$$

$$\mathbf{F_3} = 8,$$

$$\mathbf{F_4} = \mathbf{M} - 6 = 24 - 6 = 18.$$

2. По условию, общее число элементов в рекордном каркасе **M** + **L** = 144.

   Поскольку **L** = 2**M**, то число атомов металла составляет **M** = 144/3 = 48. Это отвечает уравнению $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = 8$, которое имеет только одно решение в целых неотрицательных числах, (2,2).

$$\mathbf{L} = 2\mathbf{M} = 96,$$

$$\mathbf{F_3} = 8,$$

$$\mathbf{F_4} = \mathbf{M} - 6 = 48 - 6 = 42.$$

3. Запишем теорему Эйлера для выпуклых многогранников:

$$\mathbf{V} - \mathbf{E} + \mathbf{F} = 2,$$

   где для многогранника, составленного из треугольников, квадратов и пятиугольников, сходящихся в каждой вершине по четыре,

$$\text{число вершин } \mathbf{V} = 3/4\mathbf{F_3} + 4/4\mathbf{F_4} + 5/4\mathbf{F_5},$$

$$\text{число ребер } \mathbf{E} = 3/2\mathbf{F_3} + 4/2\mathbf{F_4} + 5/2\mathbf{F_5} = 2\mathbf{V},$$

$$\text{число граней } \mathbf{F} = \mathbf{F_3} + \mathbf{F_4} + \mathbf{F_5}.$$

   Тогда

$$3/4\mathbf{F_3} + 4/4\mathbf{F_4} + 5/4\mathbf{F_5} - 3/2\mathbf{F_3} - 4/2\mathbf{F_4} - 5/2\mathbf{F_5} + \mathbf{F_3} + \mathbf{F_4} + \mathbf{F_5} = 2$$

$$1/4\mathbf{F_3} - 1/4\mathbf{F_5} = 2$$

$$\mathbf{F_3} = \mathbf{F_5} + 8$$

   Поскольку все вершины одинаковы, то условие «в каждой вершине сходятся одна треугольная, две квадратных и одна пятиугольная грань» можно записать как

$$3\mathbf{F_3}:4\mathbf{F_4}:5\mathbf{F_5} = 1:2:1.$$

   Откуда следует, что

$$3\mathbf{F_3} = 5\mathbf{F_5}$$

$$3(\mathbf{F_5} + 8) = 5\mathbf{F_5}$$

$$\mathbf{F_5} = 12.$$

   По условию, общее число элементов в МОКС-II-144 равно **M** + **L** = 144. Поскольку **L** = 2**M**, то число атомов металла составляет **M** = 144/3 = 48.

   Тогда

$$\mathbf{L} = 2\mathbf{M} = 96.$$

Поскольку, как найдено ранее, $\mathbf{F_5} = 12$, то

$$\mathbf{F_3} = \mathbf{F_5} + 8 = 12 + 8 = 20.$$

В свою очередь,

$$\mathbf{F_4} = \mathbf{F} - \mathbf{F_3} - \mathbf{F_5} = 2 - \mathbf{V} + 2\mathbf{V} - 2\mathbf{F_5} - 8 = \mathbf{V} - 2\mathbf{F_5} - 6 = 48 - 2\cdot 12 - 6 = 18.$$

4. Оценим максимально возможную длину ребра многогранника **a**, равную длине органического «мостика», исходя из следующих предположений:

- размер каркасной структуры **d** равен диаметру сферы, описанной вокруг него;
- площадь поверхности многогранника не превышает площадь описанной сферы.

Следовательно, приравняв эти площади друг к другу, мы получим оценку «сверху».

Площадь поверхности многогранника, отвечающего МОКС-144, равна

$$\mathbf{S_1} = \mathbf{F_3S_\Delta} + \mathbf{F_4S_\Delta} = 8\mathbf{a}^2\sqrt{3}/4 + 42\mathbf{a}^2 = (2\sqrt{3} + 42)\mathbf{a}^2.$$

Площадь поверхности сферы радиуса **d** составляет

$$\mathbf{S_2} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{d}^2.$$

Приравнивая площади, получаем

$$(2\sqrt{3} + 42)\mathbf{a}^2 = \boldsymbol{\pi}\mathbf{d}^2,$$

что отвечает

$$\mathbf{a} = \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{3}+42}}\mathbf{d}$$

Следовательно, длина органического «мостика» не превышает

$$\mathbf{a} = \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{3}+42}}\cdot 7 \approx \sqrt{0{,}07}\cdot 7 \approx 0{,}26\cdot 7 = 1{,}82 \text{ нм}.$$

Решение задачи 8. Самосборка молекулярных треугольников (20 баллов)

1.

Поколение	0	1	2	3
BPyB	3	6	15	42
L-Trp	3	9	27	81

2. $\mathbf{N}_{\mathbf{L\text{-}Trp}} = 3^{\mathbf{n+1}}$.

   В случае с ВРуВ пошагово проанализируем то, как меняется его количество от поколения к поколению:

   $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{N}_{\mathbf{BPyB}}(0) = 3 = 3$

   $\mathbf{A} = 1$, $\mathbf{N}_{\mathbf{BPyB}}(1) = 6 = 3\cdot 2 = 3\cdot(3 - 1) = 3\cdot(\mathbf{N}_{\mathbf{BPyB}}(0) - 1) = 3^2 - 3^1$

   $\mathbf{A} = 2$, $\mathbf{N}_{\mathbf{BPyB}}(2) = 15 = 3\cdot 5 = 3\cdot(6 - 1) = 3\cdot(\mathbf{N}_{\mathbf{BPyB}}(1) - 1) = 3\cdot(3\cdot(3 - 1) - 1) = 3^3 - 3^2 - 3^1$

   $\mathbf{A} = 3$, $\mathbf{N}_{\mathbf{BPyB}}(3) = 42 = 3\cdot 14 = 3\cdot(15 - 1) = 3\cdot(\mathbf{N}_{\mathbf{BPyB}}(2) - 1) = 3\cdot(3\cdot(3\cdot(3 - 1) - 1) - 1) = 3^4 - 3^3 - 3^2 - 3^1$

   Следовательно, для произвольного **n**,

$$\mathbf{N}_{\mathbf{BPyB}}(\mathbf{n}) = 3^{\mathbf{n+1}} - \Sigma^{\mathbf{n}}3^{\mathbf{x}} = 3^{\mathbf{n+1}} - 1{,}5(3^{\mathbf{n}} - 1) = 1{,}5(3^{\mathbf{n}} + 1).$$

3.

   а)

$$\mathbf{N}_{\mathbf{L\text{-}Trp}}(0):\mathbf{N}_{\mathbf{BPyB}}(0) = 3:3 = 1:1,$$

$$\mathbf{N}_{\mathbf{L\text{-}Trp}}(1):\mathbf{N}_{\mathbf{BPyB}}(1) = 9:6 = 3:2,$$

$$\mathbf{N}_{\mathbf{L\text{-}Trp}}(2):\mathbf{N}_{\mathbf{BPyB}}(2) = 27:15 = 9:5.$$

   б)

$$lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{1{,}5(3^n+1)} = 2,$$

   тогда $\mathbf{N}_{\mathbf{L\text{-}Trp}}(\mathbf{n}):\mathbf{N}_{\mathbf{BPyB}}(\mathbf{n}) = 2:1$.

4. $\mathbf{N}_{\mathbf{L\text{-}Trp}}(\mathbf{x}) + \mathbf{N}_{\mathbf{BPyB}}(\mathbf{x}) = 3^{\mathbf{x}+1} + 1{,}5(3^{\mathbf{x}} + 1) = 4{,}5\cdot 3^{\mathbf{x}} + 1{,}5$ и $\mathbf{N}_{\mathbf{L\text{-}Trp}}(\mathbf{x}) + \mathbf{N}_{\mathbf{BPyB}}(\mathbf{x}) = 1095$

$$4{,}5\cdot 3^{\mathbf{x}} + 1{,}5 = 1095$$

$$3^{\mathbf{x}} = 243$$

$$\mathbf{x} = \log_3 243 = 5.$$

5. Поскольку искомая биомолекулярная структура является, как найдено ранее, треугольником Серпинского 5-го поколения, то длину его ребра можно оценить как $2^5 = 32$ длины ребра треугольника Серпинского нулевого поколения, то есть, **L** = 64 нм.

   Диаметр окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника со стороной **L**, равен

$$\mathbf{D} = 2\mathbf{L}/\sqrt{3} \approx 75 \text{ нм}.$$

В свою очередь, длина ребра центральной полости треугольника Серпинского 5-го поколения составляет 2^4 = 16 длин ребер треугольника Серпинского нулевого поколения, то есть, $\mathbf{L_2}$ = 32 нм.

Диаметр окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной $\mathbf{L_2}$, равен

$$\mathbf{d} = \mathbf{L_2}/\sqrt{3} \approx 19 \text{ нм.}$$