Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 8. Супертетраэдр и Супертетраэдр Серпинского

1. В супертетраэдре **Tn** атомы **M** расположены в форме тетраэдра, на ребро которого приходится **n** атомов, а атомы **Y** − в форме тетраэдра, на ребро которого приходится (**n** + 1) атомов.

   а) Для **n** = 5:

   $$\mathbf{a}_T(5) = \mathbf{Td}_5 = 35,$$

   $$\mathbf{b}_T(5) = \mathbf{Td}_6 = 56.$$

   б) В **n**-ом поколении:

   $$\mathbf{a}_T(\mathbf{n}) = \mathbf{Td}_\mathbf{n} = (\mathbf{n}^3 + 3\mathbf{n}^2 + 2\mathbf{n})/6$$

   $$\text{и } \mathbf{b}_T(\mathbf{n}) = \mathbf{Td}_{\mathbf{n+1}} = ((\mathbf{n} + 1)^3 + 3(\mathbf{n} + 1)^2 + 2(\mathbf{n} + 1))/6 = (\mathbf{n}^3 + 6\mathbf{n}^2 + 11\mathbf{n} + 6)/6.$$

2. При переходе от поколения к поколению в **Sm**(**T2**) количество атомов **M** каждый раз увеличивается в 4 раза (исходя из принципов построения), следовательно,

   $$\mathbf{a}_S(\mathbf{m}) = \mathbf{a}_T(\mathbf{n})\cdot 4^\mathbf{m} = \mathbf{a}_T(2)\cdot 4^\mathbf{m} = 4\cdot 4^\mathbf{m} = 4^\mathbf{m+1}$$

   $$\text{и } \mathbf{a}_S(3) = 256.$$

   В то же время, число атомов **Y** при переходе от поколения к поколению в **Sm**, с одной стороны, увеличивается в 4 раза, а с другой – необходимо учитывать, что в точках касания супертетраэдры имеют общие атомы **Y**, по одному на каждом из ребер **Sm**:

   $$\mathbf{b}_S(1) = \mathbf{b}_T(2)\cdot 4 – 6 = \mathbf{b}_T(2)\cdot 4 – 6 = 34.$$

   Повторяя рассуждения, получаем

   $$\mathbf{b}_S(2) = \mathbf{b}_s(1)\cdot 4 – 6 = (\mathbf{b}_T(2)\cdot 4 – 6)\cdot 4 – 6 = 130$$

   $$\mathbf{b}_S(3) = 514$$

   …

   $$\mathbf{b}_S(\mathbf{m}) = \mathbf{b}_T(2)\cdot 4^\mathbf{m} – 6\sum_0^m 4^{a-1} = \mathbf{b}_T(2)\cdot 4^\mathbf{m} − 6(4^\mathbf{m} − 2)/3 = 4^\mathbf{m}(10 − 2) + 2 = 8\cdot 4^\mathbf{m} + 2$$

   или

   $$\mathbf{b}_S(\mathbf{m}) = 2(\mathbf{a}_S(\mathbf{m})+ 1)$$

   а) $\mathbf{a}_S(3) = 256$ и $\mathbf{b}_S(3) = 514$

   б) $\mathbf{a}_S(\mathbf{m}) = 4^{\mathbf{m+1}}$ и $\mathbf{b}_S(\mathbf{m}) = 8\cdot 4^\mathbf{m} + 2$

3. Центральная полость супертетраэдра Серпинского имеет форму октаэдра – многогранника, гранями которого являются 4 («окна» на гранях супертетраэдра Серпинского) + 4 (грани «базовых» супертетраэдров, «смотрящие» во внутрь супертетраэдра Серпинского) = 8 правильных треугольников.

4. Чтобы рассчитать размер нанокластера **S2**(**T2**), необходимо найти расстояние между центрами атомов **Y**(**d**$_2$), которое связано с **d** как ребро правильного тетраэдра с радиусом описанной вокруг него сферы:

$$\mathbf{d} = \sqrt{6}\, d_2/4,$$

откуда

$$\mathbf{d_2} = 4 \cdot 0{,}24/\sqrt{6} = 0{,}39 \text{ нм}.$$

Длина ребра нанокластера **S2**(**T2**), исходя из принципа построения (число единичных тетраэдров, приходящееся на ребро супертетраэдра Серпинского, удваивается при переходе от поколения к поколению **Sm**), составляет

$$\mathbf{d_3} = 2 \cdot 2^2 \mathbf{d_2} = 3{,}12 \text{ нм}.$$

Тогда размер нанокластера как диаметр сферы, описанной вокруг тетраэдра **S2**(**T2**), равен

$$\mathbf{D} = \frac{\sqrt{6}}{2} d_3 = 4\sqrt{6} d_2 = 3{,}82 \text{ нм}.$$

Длина ребра октаэдра, являющегося внутренней полостью **S2**(**T2**), равна (исходя из принципа построения) длине ребра нанокластера **S2**(**T1**)

$$\mathbf{d_4} = 2 \cdot 2^1 \mathbf{d_2} = 1{,}56 \text{ нм}.$$

Тогда максимальный диаметр сферической частицы, которая поместится в полости нанокластера **S2**(**T2**), равен диаметру сферы, вписанной в октаэдр с ребром **d**$_4$, и составляет

$$\mathbf{D_o} = \frac{\sqrt{6}}{3} d_4 = 1{,}27 \text{ нм}.$$