



Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур) Решение задачи 1. Геометрия радиолярий

1. Площадь поверхности сферы составляет $S = \pi D^2 = 5844 \text{ мкм}^2$.

В то же время, площадь многогранника равна сумме площадей составляющих его многоугольников, помноженных на общее число многоугольников каждого вида:

$$S = F_5 \cdot S_5 + F_6 \cdot S_6 + F_7 \cdot S_7.$$

Площадь любого равностороннего многоугольника можно приблизить суммой площадей равносторонних треугольников $S_3 = 0,5d^2 \sin 60^\circ = 0,974 \text{ мкм}^2$:

$$\begin{aligned} S &= 5F_5 \cdot S_3 + 6F_6 \cdot S_3 + 7F_7 \cdot S_3 = S_3(5(12 + F_7) + 6F_6 + 7F_7) = 6S_3(10 + 2F_7 + F_6) \\ S &= 6S_3(F_5 + F_6 + F_7 - 2) = 6S_3(F - 2) = 6S_3(F - 2) \end{aligned}$$

Что можно приблизить как $S = 6S_3(F - 2) \approx 6S_3F$.

Тогда общее число граней $F = S/(6S_3) = 5844/(6 \cdot 0,974) = 1000$.

2. Запишем теорему Эйлера для скелетного многогранника:

$$V = 5F_5/3 + 6F_6/3 + 7F_7/3 \text{ (каждый } n\text{-угольник дает } n \text{ вершин, но каждая вершина принадлежит трем многоугольникам),}$$

$$E = 5F_5/2 + 6F_6/2 + 7F_7/2 \text{ (каждый } n\text{-угольник дает } n \text{ ребер, но каждое ребро принадлежит двум многоугольникам),}$$

$$\begin{aligned} F &= F_5 + F_6 + F_7. \\ 5F_5/3 + 6F_6/3 + 7F_7/3 - (5F_5/2 + 6F_6/2 + 7F_7/2) + F_5 + F_6 + F_7 &= 2 \\ F_5 - F_7 &= 12 \end{aligned}$$

Рассчитаем число граней разных типов:

$$\begin{aligned} F_7 &= \delta F = 15/100 \cdot 1000 = 150. \\ F_5 &= 12 + F_7 = 162 \\ F_6 &= F - F_7 - F_5 = 1000 - 150 - 162 = 688. \end{aligned}$$