Физика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 10. Наномяч в вакууме

1. Как и для мяча, кинетическая энергия бакибола складывается из двух слагаемых – кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращения. Фуллерен, как и мяч, будет иметь 6 степеней свободы: 3 поступательных (поступательное движение относительно осей x, y, z) и 3 вращательных (вращение в пространстве относительно осей x, y, z).

2. а) Поступательное движение фуллерена:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT \tag{2.1}$$

(на каждую из трех степеней свободы приходится энергия 1/2·kT).

Тогда

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3kTN_a}{M}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \tag{2.2}$$

(т.к. расчет производится для единичной молекулы).

Подставляя **M** = 60**m**$_c$ = 0,72 кг/моль, находим среднюю скорость бакибола (на самом деле среднюю квадратичную, но, согласно условию, ее отличием от средней пренебрегаем) при 800K, **v** = **166** м/с.

б) Рассмотрим вращение фуллерена. На три степени свободы вращения будет так же приходиться кинетическая энергия вращения

$$3/2 \cdot kT. \tag{2.3}$$

Тогда кинетическая энергия вращения составит:

$$E = \sum_{i=1}^{60} \frac{m_c v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{60} \frac{m_c (r_i \omega)^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}, \tag{2.4}$$

где

I = $\sum_{i=1}^{60} m_c r_i^2$ – момент инерции фуллерена,

ω – средняя (средняя квадратичная) угловая скорость,

m_c – масса атома углерода,

r_i – расстояние **i**-го атома углерода от оси вращения,

60 – число атомов углерода в молекуле бакибола.

Поскольку расстояния всех атомов фуллерена до центра молекулы равны и число атомов углерода 60, что достаточно много, то для дальнейших оценок удобно приближенно считать бакибол полой сферой, вся масса которой равномерно распределена по поверхности. Момент инерции сферы составляет

$$I = 2/3 \cdot mr^2 \qquad (2.5)$$

(формулу можно взять в справочнике или вывести путем несложного интегрирования).

Приравнивая (2.3) к (2.4), получаем уравнение

$$\frac{I\omega^2}{2} = \frac{3}{2}kT \qquad (2.6)$$

Выражая **ω** из (2.6) и подставляя и ее, и (2.5)в

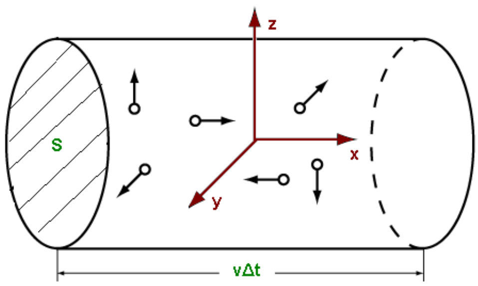
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \qquad (2.7)$$

получаем:

$$\nu = \sqrt{\frac{9RT}{8\pi^2 Mr^2}}, \qquad (2.8)$$

$$\nu = \sqrt{\frac{9 \cdot 8{,}31 \cdot 800}{8 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}72 \cdot (0{,}35 \cdot 10^{-9})^2}} \approx 9{,}3 \cdot 10^{10}\ \text{(Гц) или } \underline{\mathbf{93}}\ \text{Ггц.}$$

3. Поскольку давление в процессе сублимации навески по условию постоянно, то скорость сублимации будет равна числу молекул бакибола, «столкнувшихся» с отверстием за единицу времени.



Для расчета этого потока, воспользуемся логикой вывода основного уравнения МКТ.

- Если считать, что направление движения каждой молекулы случайно, то вдоль оси **x** движется в среднем каждая третья молекула, из них половина движется к отверстию, а половина – от отверстия.
- Если в единице объема содержится $\mathbf{C_N}$ молекул газа, то в сторону отверстия по оси **x** будут двигаться примерно $1/6 \cdot \mathbf{C_N}$ молекул (на самом деле $1/4 \cdot \mathbf{C_N}$, но в рамках школьной программы это строго не выводится).
- За время **Δt** путь молекулы со скоростью **v** составит **vΔt**.
- Тогда, при концентрации молекул в единице объема $\mathbf{C_N}$, через отверстие площадью **S** за время **Δt** камеру покинет 1/6 количества молекул, находящихся в объеме изображенного на рисунке цилиндра, или

$$\Delta N = 1/6 \cdot C_N S v \Delta t. \qquad (3.1)$$

- Концентрация молекул бакибола $\mathbf{C_N}$ в камере постоянна, поскольку по условию давление в течение всего процесса сублимации постоянно.
- Поскольку

$$pV = nRT = N/N_a \cdot RT = NkT \tag{3.2}$$

и, по определению,

$$C_N = N/V, \text{ то } C_N = p/(kT), \tag{3.3}$$

тогда:

$$\Delta N = \frac{1}{6} \cdot CNSv\Delta t = \frac{pSv\Delta t}{6kT}. \tag{3.4}$$

Подставляя **v** из (2.2) в (3.4), получаем:

$$\Delta N = \frac{pS}{6kT}\sqrt{\frac{3RT}{M}}\Delta t = \frac{pSN_a}{2}\sqrt{\frac{1}{3MRT}}\Delta t \tag{3.5}$$

$$\text{Или } \Delta t = \frac{2\sqrt{3MRT}}{pS}\frac{\Delta N}{N_a} = \frac{2\sqrt{3MRT}}{pS}\Delta n = \frac{2m\sqrt{3RT}}{pS\sqrt{M}}, \tag{3.6}$$

и, учитывая, что $S = d^2$, получаем:

$$\Delta t = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-6}\sqrt{3 \cdot 8{,}31 \cdot 800}}{0{,}4 \cdot (1 \cdot 10^{-6})^2\sqrt{0{,}72}} = 8{,}3 \cdot 10^9 \text{ с.}$$

Найдем массу фуллерена, которая находится в виде пара в ячейке. Поскольку

$$pV = m/M \cdot RT \text{ и } V = a^3,$$

$$\text{то } m = \frac{pa^3M}{RT} = \frac{0{,}4 \cdot \left(1 \cdot 10^{-6}\right)^3 \cdot 720}{8{,}31 \cdot 800} = 4{,}3 \cdot 10^{-20} \text{ г,} \tag{3.7}$$

следовательно, эту массу можно не учитывать по сравнению с массой навески фуллерена.

4. Установив напротив отверстия гибкий кантилевер или гибкую пластинку, можно по углу изгиба определить действующую на них силу, равную силе давления паров бакибола, приходящуюся на площадь отверстия. Следовательно, рассчитать давление в ячейке.

   Как следует из предыдущего пункта, скорость сублимации бакибола также зависит от давления, поэтому, измеряя зависимость массы ячейки от времени, можно найти давление через тангенс угла наклона этой зависимости.