Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)
Решение задачи 7. Строим полые кластеры из металла

1. Треугольники «выкройки» могут сходиться вместе по 3, 4, 5 и 6 штук. Но в последнем случае они образуют не вершину многогранника, а грань второго типа – в форме правильного шестиугольника. Следовательно, всего возможно три типа вершин.

2. Обозначим нижним индексом число треугольников, сходящихся в одной вершине, тогда суммарно в многограннике:

   - число вершин

   $$\mathbf{V} = \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4 + \mathbf{V}_5,$$

   - число ребер

   $$\mathbf{E} = 0{,}5(3\mathbf{V}_3 + 4\mathbf{V}_4 + 5\mathbf{V}_5),$$

   - число граней

   $$\mathbf{F} = 1/3(3\mathbf{V}_3 + 4\mathbf{V}_4 + 5\mathbf{V}_5).$$

   Запишем теорему Эйлера для выпуклых многогранников:

   $$\mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4 + \mathbf{V}_5 – 0{,}5(3\mathbf{V}_3 + 4\mathbf{V}_4 + 5\mathbf{V}_5) + 1/3(3\mathbf{V}_3 + 4\mathbf{V}_4 + 5\mathbf{V}_5) = 2.$$

   Упрощая, получаем

   $$3\mathbf{V}_3 + 2\mathbf{V}_4 + \mathbf{V}_5 = 12.$$

   Варьируя $\mathbf{V}_3$, $\mathbf{V}_4$ и $\mathbf{V}_5$, найдем все возможные целочисленные решения полученного уравнения, отвечающие условию — не более двух типов вершин одновременно (то есть, такие решения, в которых как минимум одна из величин $\mathbf{V}_3$, $\mathbf{V}_4$ и $\mathbf{V}_5$ равна нулю).

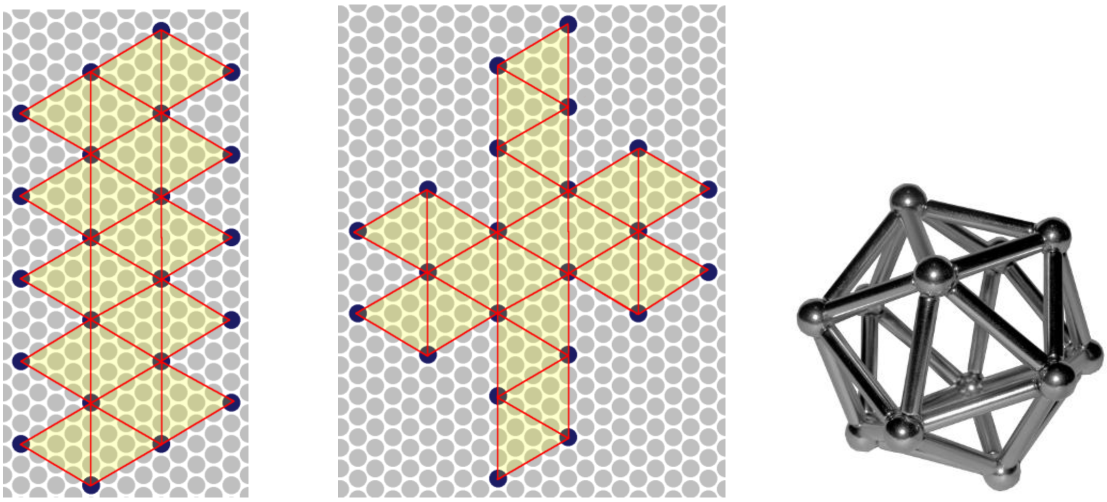
   Всего существует 12 таких решений. Общее число вершин, ребер и граней для каждого из них представлены в таблице:

Тип	V_3	V_4	V_5	V	E	F	Тип	V_3	V_4	V_5	V	E	F
1	0	0	12	12	30	20	**7**	0	6	0	6	12	8
2	0	1	10	11	27	18	**8**	1	0	9	10	24	16
3	0	2	8	10	24	16	**9**	2	0	6	8	18	12
4	0	3	6	9	21	14	**10**	2	3	0	5	9	6
5	0	4	4	8	18	12	**11**	3	0	3	6	12	8
6	0	5	2	7	15	10	**12**	4	0	0	4	6	4

3. Многогранник, все грани которого являются правильными треугольниками, называют дельтаэдром. Название происходит от греческой заглавной буквы дельта (Δ), которая имеет форму равностороннего треугольника. Всего существует 8 дельтаэдров.

   Далее представлены развертки (либо доказана невозможность их построения) для всех 12 решений, полученных в вопросе 2.

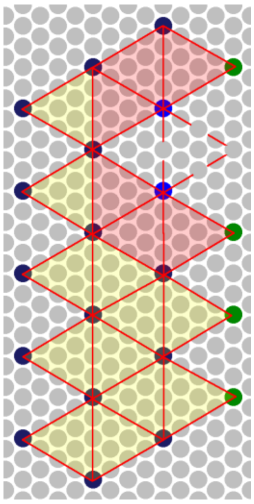
Тип 1



а *б* *в*

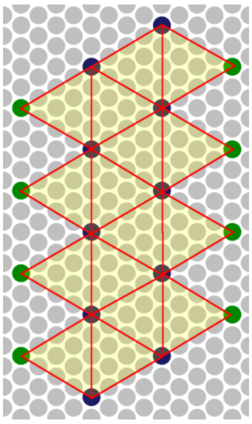
20 правильных треугольников, сходящихся по 5 в каждой из вершин, можно «собрать» единственно возможным образом (рис. 1а, б) – **<u>в форме икосаэдра</u>** (рис. 1в, каркасная модель) (он же – *скрученно удлиненная пятиугольная бипирамида*).

Тип 2

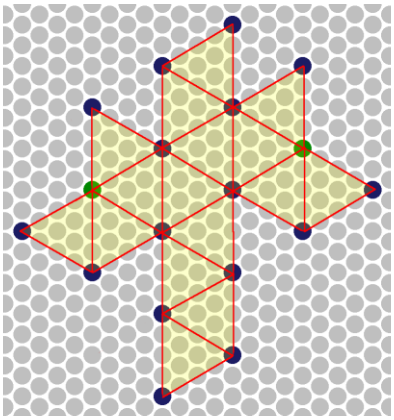


Чтобы из многогранника первого типа получить многогранник второго типа, необходимо удалить из него 1 вершину, 3 ребра и 2 грани так, чтобы одна из пяти-координированных вершин (на рисунке – темно-синего цвета) превратилась в четырех- координированную (зеленого цвета). Но удаление любого атома, хоть и сопровождается удалением трех ребер и двух граней, вместе с тем, приводит к образованию <u>шести-</u> координированного атома (отмечен на рисунке ярко-синим цветом). То есть, данный многогранник *<u>построить невозможно</u>*.

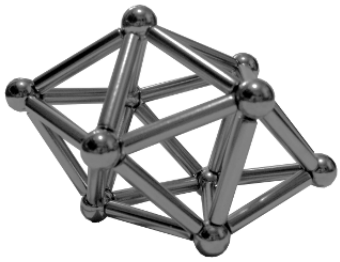
Тип 3



а



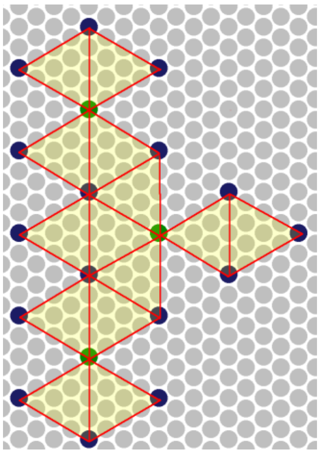
б



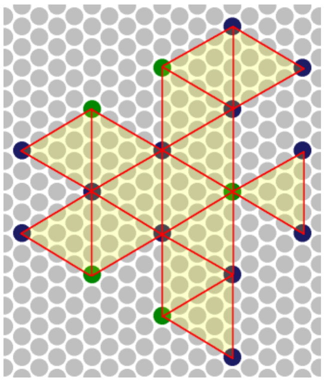
в

Многогранник третьего типа – с 2 четырех- координированными и 8 пяти-координированными вершинами – легко получить, «убрав» из икосаэдра один из пяти секторов скручено удлиненной бипирамиды, то есть, полоску из четырех треугольных граней (рис. 3а, б). Многогранник – **скручено удлиненная четырехугольная (квадратная) бипирамида** (рис. 3в).

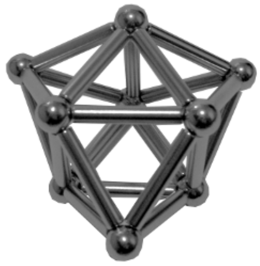
Тип 4



а



б



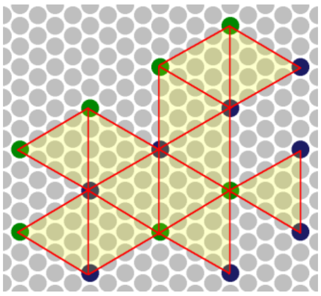
в

Единственный способ построить многогранник 4 типа из равносторонних треугольников – это **трижды наращённая треугольная призма** (рис. 4в), поскольку другой подход, основанный на удалении из многогранника 3 типа двух граней возле одной из четырех- координированных вершин, приводит к образованию вырожденного случая – грани в виде ромба, противолежащей оставшейся четырех-координированной вершине.

Трижды наращённую треугольную призму (рис. 4в) можно получить из четырех многогранников – трех квадратных пирамид и правильной треугольной призмы, приложив основания пирамид к боковым граням призмы.

Ее можно описать как (см. рис. 4б) пятиугольная «шапочка», соединенная с треугольной гранью «поясом» из 7 треугольников.

Тип 5



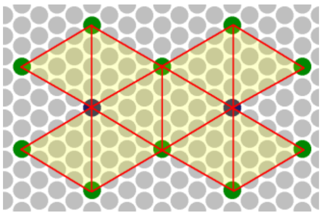
а

б

Многогранник 5 типа (рис. 5а) можно получить из многогранника 4 типа (рис. 4б) путем удаления двух треугольников из его «пояса». Выпуклый многогранник с двенадцатью правильными треугольниками в качестве граней носит название **плосконосого двуклиноида** (рис. 5б) или *сиамского додекаэдра*.

Другой вариант построения двенадцатигранника, имеющего 4 четырех- и 4 пяти-координированные вершины, из правильных треугольников – четырехугольная антипризма – имеет грани в виде ромбов.

Тип 6

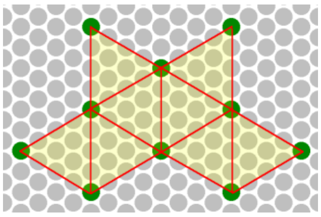


а

б

10 правильных треугольников, образующие 2 пяти- координированные и 5 четырех-координированные вершины – это **пятиугольная бипирамида** (рис. 6б).

Тип 7

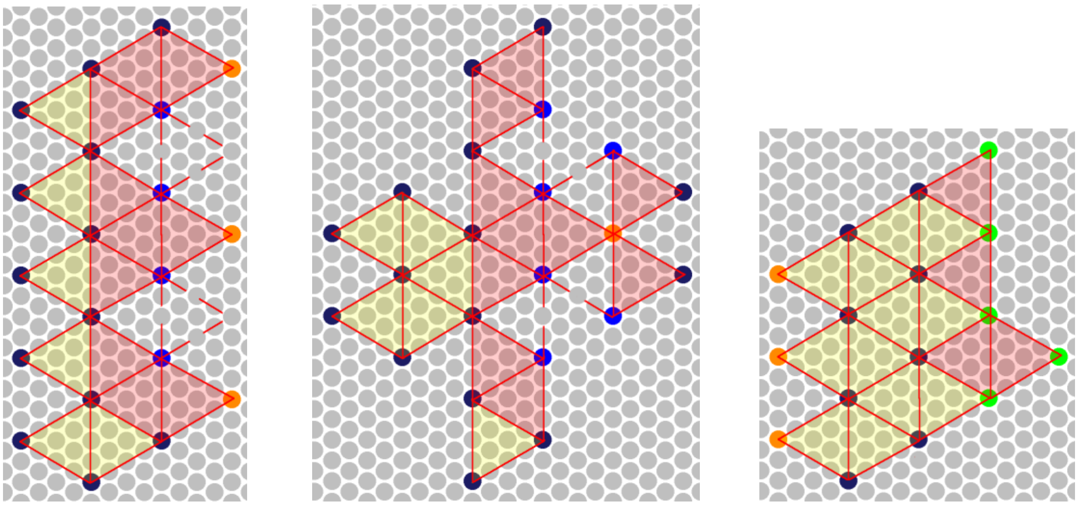


а

б

8 правильных треугольников, сходящихся по 4 в каждой вершине, можно сложить всего одним способом – **в форме октаэдра** (рис. 7б) (он же – *квадратная бипирамида*, *треугольная антипризма*).

Тип 8

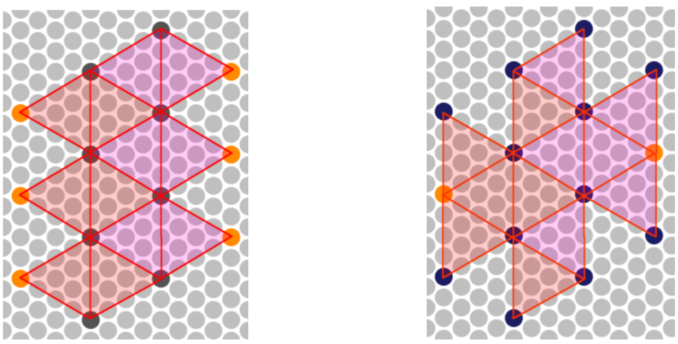


а *б* *в*

Первый подход к построению «выкройки» (рис. 8а, б): Чтобы из многогранника первого типа получить многогранник восьмого типа, необходимо удалить из него 2 вершины, 6 ребер и 4 грани так, чтобы одна из пяти- координированных вершин превратилась в трех- координированную (оранжевого цвета). Но удаление двух атомов, хоть и сопровождается удалением шести ребер и четырех граней, вместе с тем, приводит к образованию двух шести- координированных атомов (отмечены на рисунке ярко-синим цветом). То есть, данный многогранник *построить невозможно*.

Второй подход (рис. 8в): последовательное построение. Берем «шапочку» из трех треугольников (4 вершины), затем добавляем к нему последовательно два «пояса» в форме треугольных антипризм (+6 вершин, +12 граней), при этом добавление последнего треугольника приводит к формированию трех *четырех*-координированных вершин вместо *пяти*- координированных. То есть, данный многогранник *построить невозможно*.

Тип 9



а *б*

Многогранник 9 типа – 12 треугольников, 2 трех- координированные вершины и 6 пяти- координированных – это *скрученно удлиненная треугольная бипирамида*. В случае правильных треугольников грани попарно образуют ромбы (а, значит, формируют ромбоэдр, что не удовлетворяет условию треугольных граней). То есть, данный многогранник *построить невозможно*.

Тип 10

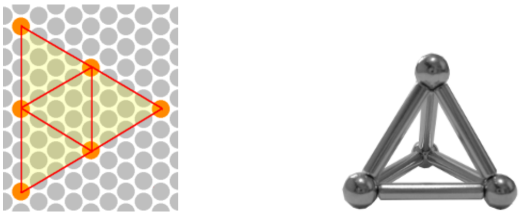
а *б*

6 правильных треугольников, образующие 2 трех- координированные и 3 четырех-координированные вершины – это **треугольная бипирамида** (рис. 10б).

Тип 11

Из 8 правильных треугольников можно сложить только один многогранник с шестью вершинами – это тип 7, октаэдр. То есть, многогранник с $\mathbf{V_3} = 3$, $\mathbf{V_5} = 3$ *построить невозможно*.

Тип 12



а *б*

4 правильных треугольника, сходящихся по 3 в каждой вершине, можно сложить всего одним способом – **в форме тетраэдра** (рис. 12б).