



**Математика для школьников 7 – 11 класса (заочный тур)**  
**Решение задачи 6. Ошибка тест-системы**

1. Предположим, что тестом **X** будут протестированы все жители.

Введем следующие обозначения:

- $\omega$  – доля больных среди жителей,
- $N$  – общее число жителей,
- $S$  – специфичность теста **X**,
- $R$  – чувствительность теста **X**,
- $D, D^+, D^-$  – общее число больных жителей и число больных жителей, которые могут получить положительный и отрицательный результат теста **X**, соответственно,
- $H, H^+, H^-$  – общее число здоровых жителей и число здоровых жителей, которые могут получить положительный и отрицательный результат теста **X**, соответственно.

По определению,

$$S = H^-/H,$$

$$R = D^+/D.$$

Поскольку

$$D = N\omega$$

и  $H = N - N\omega = N(1 - \omega),$

то

$$D^+ = RD = Rn\omega,$$

$$D^- = N\omega(1 - R),$$

$$H^- = SN(1 - \omega),$$

$$H^+ = N(1 - \omega)(1 - S).$$

а) Вероятность того, что при тестировании всех жителей тестом **X** здоровый житель получит ложноположительный результат равна отношению таких результатов к общему числу положительных результатов:

$$\delta_1 = H^+/(D^+ + H^+) = \frac{N(1 - \omega)(1 - S)}{RN\omega + N(1 - \omega)(1 - S)} = \frac{(1 - \omega)(1 - S)}{R\omega + (1 - \omega)(1 - S)}$$

$$\delta_1 = \frac{(1 - 0,05)(1 - 0,99)}{0,9 \cdot 0,05 + (1 - 0,05)(1 - 0,99)} = 0,174.$$

б) Вероятность того, что при тестировании всех жителей тестом **X** больной житель получит ложноотрицательный результат равна отношению таких результатов к общему числу отрицательных результатов:

$$\delta_2 = D^-/(D^- + H^-) = \frac{N\omega(1 - R)}{N\omega(1 - R) + SN(1 - \omega)} = \frac{\omega(1 - R)}{\omega(1 - R) + S(1 - \omega)}$$

$$\delta_2 = \frac{0,05(1 - 0,9)}{0,05(1 - 0,9) + 0,99(1 - 0,05)} = 0,005.$$

2. Среди людей, получивших положительный результат первого теста **X** (**N'** человек), доля больных составляет

$$\omega' = 1 - \delta_1 = 1 - 0,174 = 0,826.$$

Тогда вероятность того, что при двукратном тестировании всех жителей тестом **X** здоровый житель дважды получит ложноположительный результат равна:

$$\delta_3 = \frac{H'^+}{(D'^+ + H'^+)} = \frac{N'(1 - \omega')(1 - S)}{RN'\omega' + N'(1 - \omega')(1 - S)} = \frac{(1 - \omega')(1 - S)}{R\omega' + (1 - \omega')(1 - S)}$$

$$\delta_3 = \frac{(1 - 0,826)(1 - 0,99)}{0,9 \cdot 0,826 + (1 - 0,826)(1 - 0,99)} = 0,002.$$

Таким образом, получение повторного положительного ПЦР-теста с близкой к 100% вероятностью гарантирует, что человек болен COVID-19.