Тест ЗНТШ. Математика (отборочный этап)
Решение

1. **Ответ:** 1001

По теореме Эйлера для выпуклых многогранников, состоящих из пяти- и шестиугольников, сходящихся в вершинах по 3 (см. лекцию ЗНТШ по математике):

$$\mathbf{V} - \mathbf{E} + \mathbf{F} = 2,$$

где

$$\text{число вершин } \mathbf{V} = 5/3\mathbf{F}_5 + 6/3\mathbf{F}_6,$$

$$\text{число ребер } \mathbf{E} = 5/2\mathbf{F}_5 + 6/2\mathbf{F}_6,$$

$$\text{число граней } \mathbf{F} = \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6.$$

Объединяя, получаем

$$5/3\mathbf{F}_5 + 6/3\mathbf{F}_6 - 5/2\mathbf{F}_5 - 6/2\mathbf{F}_6 + \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6 = 2$$

$$\mathbf{F}_5 = 12$$

Тогда

$$\mathbf{V} = 20 + 2\mathbf{F}_6$$

$$\mathbf{F}_6 = 0{,}5\mathbf{V} - 10 = 0{,}5\cdot 2022 - 10 = 1001$$

2. **Ответ: увеличится в 200 тысяч раз**

Запишем выражение для вычисления удельной площади поверхности для частицы в форме куба со стороной **a**, изготовленного из материала с плотностью **ρ**:

$$S_{\text{уд}} = \frac{S}{m} = \frac{S}{V\rho} = \frac{6a^2}{a^3\rho} = \frac{6}{a\rho}.$$

При изменении длины ребра куба от $\mathbf{a_1}$ = 1 см до $\mathbf{a_2}$ = 50 нм удельная площадь поверхности увеличивается в

$$\frac{S_{\text{уд}2}}{S_{\text{уд}1}} = \frac{6a_1\rho}{6a_2\rho} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{10^{-2}}{50\cdot 10^{-9}} = 200000.$$

3. **Ответ:** 10

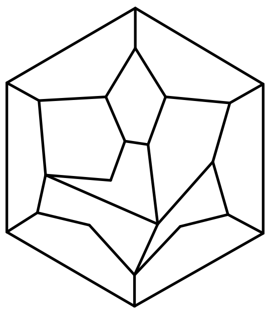
Нам необходимо найти, сколькими способами можно разместить 2 остатка аминокислоты B в пептиде длиной 3 + 2 = 5:

$$C_{3+2}^2 = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{120}{6\cdot 2} = 10.$$

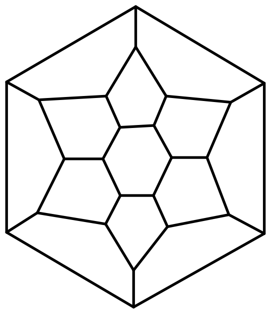
4. **<u>Ответ:</u> 5**

Фуллерен – каркасная углеродная молекула, представляющая собой выпуклый многогранник, состоящий из правильных пяти- и шестиугольников, сходящихся в каждой вершине по три.

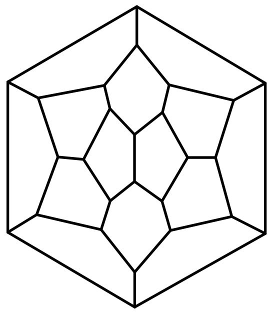
Многогранник, представленный на проекции А, не является фуллереном, так как имеются вершины, в которых сходятся по 2 или 4 ребра (многоугольника). Многогранники, представленные на остальных пяти проекциях, отвечают определению фуллерена.



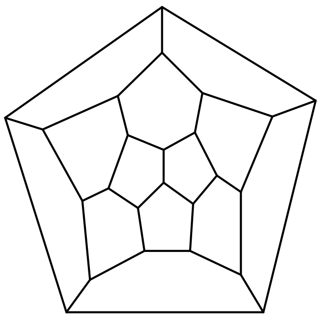
А



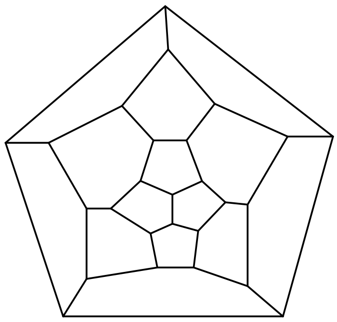
Б



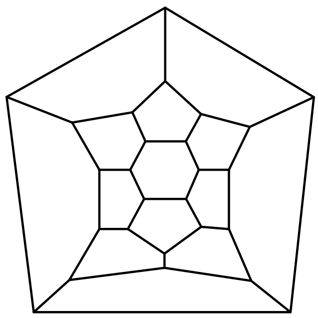
В



Г



Д



Е

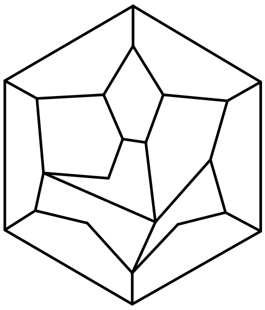
5. **<u>Ответ:</u> 2**

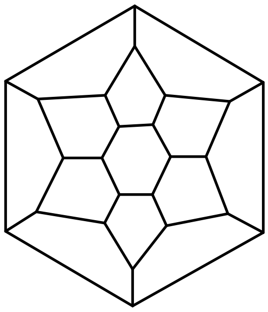
Рассчитаем число вершин в каждом из многогранников, представленных на проекциях:

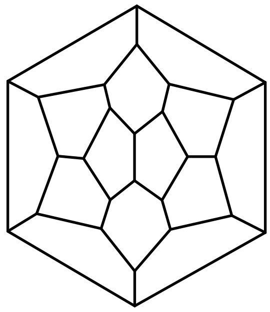
- А – фуллереном не является (см. вопрос 4),
- Б – 24,
- В – 26,
- Г – 24,
- Д – 26,
- Е – 26.

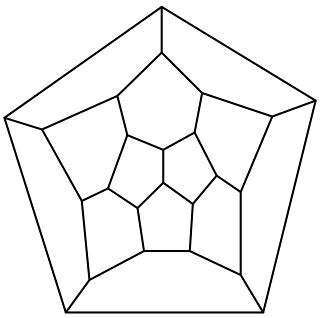
Поскольку углеродные молекулы состава C_{24} и C_{26} имеют по одной отвечающей им фуллереновой структуре (см. лекцию ЗНТШ по математике), то на рисунках Б – Е представлены только два фуллерена, просто спроецированные на разные грани.

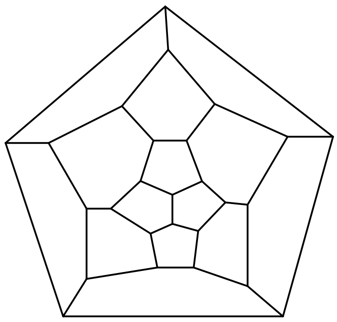
Это же можно увидеть, закрасив на представленных проекциях только пятиугольные грани и изучив взаимное расположение пяти- и шестиугольников или построив модели соответствующих многогранников из подручных материалов.

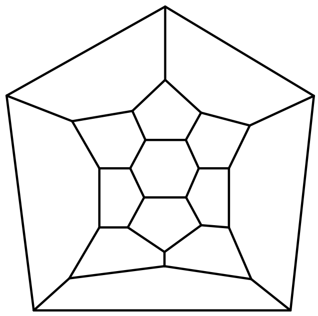

А


Б


В


Г


Д


Е

6. **<u>Ответ:</u> 240**

Развертка икосаэдра состоит из 20 одинаковых равносторонних треугольных граней, на каждый треугольник при этом приходится

6 (в плоскости треугольника) + 12 (на ребре треугольника) · 0,5 = 12 атомов углерода.

Всего в фуллерене тогда 20·12 = 240 атомов.

7. **<u>Ответ:</u> 3**

Общее число шариков в модели треугольного кластера равно:

$$T(m) = \sum_1^m k = \frac{(m)^2+m}{2} \text{ (см. лекцию ЗНТШ по математике).}$$

Если на его ребро приходится 2n шариков:

$$T(2n) = \frac{(2n)^2+2n}{2} = 2n^2 + n.$$

В свою очередь, общее число шариков в модели кластера в форме квадратной пирамиды составляет:

$$P(m) = \sum_1^m k^2 = \frac{2m^3+3m^2+m}{6}$$ (см. лекцию ЗНТШ по математике).

Если на ее ребро приходится n шариков:

$$P(n) = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}.$$

По условию,

2**T**(2**n**) = 3**P**(**n**).

Тогда

$$2(2n^2+n) = 3\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$8n^2+4n = 2n^3+3n^2+n$$

$$2n^3-5n^2-3n = 0$$

Решая полученное квадратное уравнение, получаем два корня, **n** = –0,5 и **n** = 3. Поскольку число шариков, приходящихся на ребро модели, не может быть отрицательным, то решением является **n** = 3.

8. **<u>Ответ:</u> 1 и 2**

1 – верно, поскольку любой фуллерен является выпуклым многогранником.

2 – верно (см. ответ на вопрос 1, а также лекцию ЗНТШ по математике)

3 – неверно, теорема выполняется для любого выпуклого многогранника (см. лекцию ЗНТШ по математике).

9. **<u>Ответ:</u> 24**

Два бита двоичного кода кодируют одну из четырех нуклеотидных «букв» (см. лекцию ЗНТШ по математике). Первому коду (01) можно сопоставить одну из четырех возможных «букв», второму (10) – одну из оставшихся трех, третьему (11) – одну из двух, а четвертому (00) – последнюю, не выбранную ранее, «букву». То есть, всего возможно

$$4! = 24$$

варианта расшифровки приведенного в условии кода.

10. **<u>Ответ:</u>** $\mathbf{d_1 = d_2 = d_3}$

Запишем формулы для расчета удельной площади поверхности для наночастиц каждой формы:

шар $S_{\text{удшар}} = \frac{S_{\text{шар}}}{m} = \frac{S_{\text{шар}}}{V_{\text{шар}}\rho} = \frac{4\pi(d_1/2)^2}{(4/3)\pi(d_1/2)^3\rho} = \frac{6}{d_1\rho}$

куб $S_{\text{удкуб}} = \frac{S_{\text{куб}}}{m} = \frac{S_{\text{куб}}}{V_{\text{куб}}\rho} = \frac{6d_2^2}{d_2^3\rho} = \frac{6}{d_2\rho}$

цилиндр $S_{\text{удцил}} = \frac{S_{\text{цил}}}{m} = \frac{S_{\text{цил}}}{V_{\text{цил}}\rho} = \frac{2\pi(d_3/2)^2+\pi d_3 d_3}{\pi(d_3/2)^2 d_3\rho} = \frac{2d_3^2+4d_3^2}{d_3^3\rho} = \frac{6}{d_3\rho}$

Выражая из этих формул линейные размеры, получаем:

$$\mathbf{S_{удшар} = S_{удкуб} = S_{удцил}}$$

$$\frac{6}{d_1\rho} = \frac{6}{d_2\rho} = \frac{6}{d_3\rho}$$

$$\mathbf{d_1 = d_2 = d_3}$$